جمهورية السودان

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

مرحلة التعليم الأساسي

الصّفّ الثامن

الرياضيات

بسم الله الرحمن الرحيم

وزارة التعليم العام

المركز القومي للمناهج والبحث التربويّ

- بخت الرضا -

الرياضيات

الطبعة الثانية المنقحة ٢٠٠٥م

الصّفّ الثامن للتعليم الأساسي

أعدته لجنة بتكليف من المركز القومي للمناهج والبحث التربوي من الأساتذة :

الأستاذ / على محمد الجاك – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

الأستاذ / عبد الرحمن عبد الكريم ساتي – كلية التربية – جامعة بخت الرضا

الأستاذ / يوسف محمد إبراهيم – التأهيل التربوي – الخرطوم

الأستاذ / محمد الحسن طه محمد – كلية التربية – جامعة أمدرمان الإسلامية

مراجعة :

الدكتور : عبد الغني ابراهيم محمد – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

الدكتور : محسن حسن عبدالله هاشم – كلية العلوم الرياضية – جامعة الخرطوم

الأستاذ : عبد الله محمود عبد المجيد – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

الجمع بالحاسوب :

ريم الرشيد بلال محمد – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

تهاني بابكر سليمان – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

الإخراج الفني والتصميم :

الأستاذ / إبراهيم الفاضل الطاهر – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

ISBN 978-99942-914-0-3 ردمك

الفهرســـــت

الوحدة الأولى

مجموعة الأعداد الحقيقية

تمرين مراجعة

(١) اكتب كلاً من الأعداد الآتية على الصورة $\frac{أ}{ب}$:

-7 ، $0{,}175$ ، $-3{,}25$ ، $3\frac{7}{10}$ ، $-16\frac{1}{3}$ ، $2{,}04$

(٢) اكتب النظير الجمعي والنظير الضربي لكل مما يأتي :

$1{,}5$ ، $3\frac{1}{4}$ ، $-\frac{9}{11}$ ، 19

(٣) رتِّب الأعداد الآتية ترتيباً تنازلياً :

$-2\frac{1}{2}$ ، $2{,}25$ ، $3\frac{5}{16}$ ، 0 ، 2 ، -3

(٤) جد ناتج ما يأتي :

(أ) $\frac{8}{3} + \frac{3}{12} + \frac{-5}{6}$

(ب) $5\frac{2}{3} \div -2\frac{1}{6}$

(ج) $1\frac{5}{6} + 2\frac{1}{3} \div 1\frac{1}{4}$

(٥) اكتب الأعداد النسبية الآتية في صورة كسور عشرية :

(أ) $5\frac{1}{4}$ ، $-3\frac{1}{2}$ ، $\frac{275}{1000}$

(ب) $1\frac{1}{6}$ ، $\frac{5}{9}$ ، $\frac{17}{11}$

ماذا تلاحظ في إجابات (أ) ؟

تابع عملية القسمة الطويلة في العمليات الثلاث في (ب) إلى ٦ منازل عشرية . ماذا تلاحظ ؟

الدرس الأول : مجموعة الأعداد النسبية العشرية :

حوّل الأعداد النسبية أو مكافئاتها الآتية إلى أعــداد فـــي صـــورة كسور عشرية ، بقسمة البسط على المقام مباشرة :

(أ) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧٥}{١٠}$ ، $\frac{١٩}{٨}$ ، $\frac{٣٨}{١٢٥}$ ، $\frac{٢١٦}{٦٢٥}$ ، $\frac{٧٣}{١٠٠}$ $\frac{٤٦٣٥}{١٠٠٠}$

(ب) $\frac{٣٥}{١٤}$ ، $\frac{٣٦}{٥٠}$ ، $\frac{١٥}{٤٨}$ ، $\frac{٨١}{٣٧٥}$ ، $\frac{٦٣}{٢٨}$

(١) هل انتهت عملية القسمة في كل مما سبق ؟

(٢) ما عوامل المقام في (أ) ؟

(٣) في (ب) اختصر كل عدد إلى أبسط صورة . ما عوامل كــل مقام ؟

$$\frac{٣٥}{١٤} = \frac{٥}{٢} = ٢,٥$$

$$\frac{٣٦}{٥٠} = \frac{١٨}{٢٥} = \frac{١٨}{٥^{٢}} = ٠,٧٢$$

$$\frac{١٥}{٤٨} = \frac{٥}{١٦} = \frac{٥}{٢^{٤}} = ٠,٣١٢٥$$

$$\frac{٨١}{٣٧٥} = \frac{٢٧}{١٢٥} = \frac{٢٧}{٥^{٣}} = ٠,٢١٦$$

(العدد المكتوب أعلى العددين ٢ ، ٥ يشير إلى المرات التــي يــضرب فيها العدد في نفسه)

لا بد أنك تكون قد لاحظت أنَّ عملية القسمة قد انتهت ، وأنَّ كل عدد أصبح في صورة كسر عشري منته مقامة إحدى قوى العشرة ، وبما أن العوامل الأولية لقوى العشرة هي قوى للعددين الأوليين ٢ ، ٥ ، فقواسم قوى العشرة هي قوى للعدد ٢ أو قوى للعدد ٥ أو حاصل ضرب لهذه القوى . مثل هذه الأعداد تسمى أعداداً عشرية .

(١) كل عدد نسبي مقامه إحدى قوى العشرة يسمى عدداً عشرياً .

(٢) يكون العدد النسبي المبسط عدداً عشرياً فقط إذا كانت عوامل مقامه قوى للعددين الأوليين ٢ أو ٥ .

(٣) العدد النسبي العشري يمكن تحويله إلى صورة كسر عشري منته .

مثال (١) :

حدِّد ما إذا كان العدد النسبي أو مكافئه فيما يأتي عدداً عشرياً أم لا .

(أ) $\frac{٢٧}{١٠}$ (ب) $\frac{٢٦}{١٠٠}$ (جـ) $\frac{٤٥٧٣}{١٠٠٠}$ (د) $\frac{٢٧}{١٥}$

(هـ) $\frac{٣٥}{٢١}$ (و) $\frac{٥٥}{٤٥}$ (ز) $\frac{٦٣}{٣٦}$ (ح) $\frac{٥٧}{١٤}$

الحل :

(أ) $\frac{٢٧}{١٠}$ عدد عشري

(ب) $\frac{٢٦}{١٠٠}$ عدد عشري

(جـ) $\frac{٤٥٧٣}{١٠٠٠}$ عدد عشري

(د) $\frac{٢٧}{١٥} = \frac{٩}{٥}$ عدد عشري

(هـ) $\frac{٣٥}{٢١} = \frac{٥}{٣}$ ليس عدداً عشرياً

(و) $\frac{٥٥}{٤٥} = \frac{١١}{٩}$ ليس عدداً عشرياً

(ز) $\frac{٦٣}{٣٦} = \frac{٩}{٤}$ عدد عشري

(ح) $\frac{٥٧}{١٤} = \frac{٥٧}{٢ \times ٧}$ ليس عدداً عشرياً

مثال (٢) :

ضع قيمة من رقم واحد للرمز س بحيث تجعل العــدد المعطــى عدداً نسبياً عشرياً فيما يلي :

(أ) $\frac{س + ٣}{٣٥}$ (ب) $\frac{س}{١٢}$

الحل :

(أ) لكي يكون العدد نسبياً عشرياً يجب أنْ يكون مقامه إحـــدى قـــوى العددين ٢ أو ٥ .

$\therefore$ بوضع س = ٤ يكون $\frac{\text{س} + ٣}{٣٥} = \frac{٤ + ٣}{٣٥} = \frac{٧}{٣٥} = \frac{١}{٥}$

(ب) بوضع س = ٣ يكون $\frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$

(لاحظ أنه يمكن وضع س = ٦ كذلك)

تمرين (١–١)

(١) حدِّد ما إذا كان كل عدد فيما يأتي عشرياً أم لا :

(أ) $\frac{٢١}{٧٥}$ (ب) $\frac{٤٥}{١١}$ (ج) $\frac{٣٧}{١٥}$ (د) $\frac{٣٦٤}{١٠٠}$

(هـ) $\frac{٤٩}{٢١}$ (و) $\frac{٤٥}{٦٦}$ (ز) $\frac{٢}{٢٥٠}$ (ح) $\frac{٣}{٧٧}$

(٢) ضع قيمة من رقم واحد للمتغير س بحيث يجعل العدد نسبياً عشرياً :

(أ) $\frac{\text{س} + ٢}{٢٤}$ (ب) $\frac{٩ - \text{س}}{٣٠}$ (ج) $\frac{٧}{\text{س} + ٣}$

الدرس الثاني : مجموعة الأعداد النسبية الدورية :

بتحويل الأعداد النسبية :

$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٥}{١١}$ ، $\frac{٥}{١٢}$ ، $\frac{١١٥}{٣٣٣}$ إلى صورة كسور عشرية .

نتحصل على الآتي :

$$\frac{١}{٣} = \longrightarrow ٠,٣٣٣٣٣$$

$$\frac{٥}{١١} = \longrightarrow ٠,٤٥٤٥٤٥$$

$$\frac{٥}{١٢} = \longrightarrow ٠,٤١٦٦٦٦$$

$$\frac{١١٥}{٣٣٣} = \longrightarrow ٠,٣٤٥٣٤٥$$

- هل انتهت عملية القسمة في كل حالة ؟
- ما الأرقام أو مجموعة الأرقام المتكررة في كل حالة ؟
- ما عوامل المقام في كل حالة ؟
- هل جميعها في قوي العاملين ٢ و ٥ ؟

إذا كان حاصل قسمة بسط العدد النسبي على مقامه يتكرر فيه نفس الرقم أو الأرقام بصورة غير منتهية سمي العدد : عدد نسبي دوري .

$\frac{١}{٣} = \longrightarrow$ ٠,٣٣٣٣ عدد نسبي دوري لأن العدد يتكرر .

ونكتب $\frac{١}{٣} = ٠,\overline{٣}$ بوضع شرطة واحدة فوق العدد المتكـــرر . نـــسمي العدد ٣ المتكرر دورة الكسر ونقرأ ٣ دائرة .

$\frac{٥}{١١}$ = ⟵ ٠,٤٥٤٥ عدد نسبي دوري لأن العــدد ٤٥ يتكــرر

ونكتب $\frac{٥}{١١}$ = $٠,\overline{٤٥}$ بوضع شرطة فوق العدد ٤٥ المتكرر .

$\frac{٥}{١٢}$ = $٠,٤١\overline{٦}$

$\frac{١١٥}{٣٣٣}$ = $٠,\overline{٣٤٥}$

فالعدد $٠,\overline{٥٤}$ يعني ⟵ ٠,٥٤٥٤٥٤

والعدد $٠,٥\overline{٤}$ يعني ⟵ ٠,٥٤٤٤٤٤٤

أما العدد $٠,\overline{٥٤٤}$ يعني ⟵ ٠,٥٤٤٥٤٤٥٤٤

لاحظ أن الشرطة توضع فوق مجموعة الأرقام التي تتكرر فقط من العدد النسبي الدوري .

مثال (١)

أكتب بصورة مختصرة ما يلي :

(أ) ⟵ ٠,٧٢٢٢٢ (ب) ⟵ ١,٣١٣١٣١

(ج) ⟵ ٥,٦٤١٥٤١٥٤١٥

الحل :

(أ) ⟵ ٠,٧٢٢٢٢٢ = $٠,٧\overline{٢}$

(ب) ⟵ ١,٣١٣١٣١ = $١,\overline{٣١}$

(ج) ⟵ ٥,٦٤١٥٤١٥٤١٥ = $٥,٦\overline{٤١٥}$

مثال (٢) :

جد قيمة ما يأتي :

(أ) $٠,\overline{٢٣} + ١,\overline{٥٤}$

(ب) $١٣,\overline{٢١} + ٢٥,\overline{٧}$

الحل :

(أ) ⟵ ٠,٢٣٢٣٢٣٢٣

⟵ ١,٥٤٥٤٥٤٥٤

⟵ ١,٧٧٧٧٧٧٧ $= ١,\overline{٧}$

(ب) ⟵ ١٣,٢١٢١٢١٢١

⟵ ٢٥,٧٧٧٧٧٧٧٧

⟵ ٣٨,٩٨٩٨٩٨٩٨ $= ٣٨,\overline{٩٨}$

لاحظ مما سبق أن الصورة العشرية لأي عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ إما أن تنتهي وإما أن تتكرر .

> مجموعة الأعداد النسبية مجزأة إلى مجموعتين منفصلتين ، مجموعة الأعداد العشرية ، ومجموعة الأعداد الدورية

تمرين (١–٢)

(١) أكتب أول ٦ منازل عشرية لكل من الأعداد التالية :

(أ) $٠,٣\overline{٥}$ (ب) $٠,\overline{٣٥}$ (ج) $٠,\overline{٣٥٤}$ (د) $٠,٣\overline{٥٤}$

(٢) أكتب كلاً مما يأتي في الصورة العشرية :

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٨}$ (ج) $\frac{٧}{١٠}$ (د) $\frac{٨}{٩}$

(هـ) $٢\frac{٥}{٦}$

(٣) ضع الرمز < ، > في المكان المناسب لكل مما يأتي :

(أ) $٠,٠\overline{٢}$ .... $٠,\overline{٠٢}$

(ب) $٠,\overline{٢٠٢}$ .... $٠,\overline{٠٢٠}$

(ج) $٠,٠\overline{٢}$ .... $٠,\overline{٠٢٠}$

(٤) جد قيمة ما يأتي :

(أ) $٢١,\overline{٤} + ٣٧,\overline{٥}$

(ب) $١٦,\overline{٣} + ٢١٢,\overline{١٧}$

الدرس الثالث : تحويل الأعداد الدورية إلى الصورة $\frac{أ}{ب}$:

عرفنا أن أي عدد نسبي يمكن تحويلة إما لعدد عشري أو دوري . وقد علمنا سابقا كيف نحول الكسور العشرية المنتهية إلى الصورة $\frac{أ}{ب}$ مثلاً :

$$١,٣ = ١\frac{٣}{١٠} = \frac{١٣}{١٠}$$

$$٠,٧٥ = \frac{٧٥}{١٠٠} = \frac{٣}{٤}$$ ، وهكذا .

ولكن كيف تحول العدد النسبي الدوري إلى الصورة $\frac{أ}{ب}$.

نعلم أن العدد النسبي الدوري $٠,\overline{٨}$ مثلاً هو ← ٠,٨٨٨٨٨٨ فإذا ضربنا هذا العدد في ١٠ فإن العلامة العشرية تتحرك منزلة واحدة نحو اليمين

فينتج $\longrightarrow$ ٨,٨٨٨٨٨ أي $٨,\overline{٨}$ وكذلك إذا ضربنا العدد $٠,\overline{٧٦}$ في ١٠٠ فإن العلامة العشرية تتحرك منزلتين عشريتين نحو اليمين فينتج $٧٦,\overline{٧٦}$

كم يساوي $٠,\overline{٦٩٧} \times ١٠٠٠$

$٥,٥\overline{٢٠١} \times ١٠٠٠٠$

مثال (١) : إذا كان س = $٠,\overline{٣٤٥}$

جد ١٠٠٠ س

الحل :

بما أن س = $٠,\overline{٣٤٥}$

فإن ١٠٠٠س = $٣٤٥,\overline{٣٤٥}$

مثال (٢) : جد ناتج الطرح التالي :

$٢١٦,\overline{٣١٢} - ٦,\overline{٣١٢}$

الحل :

بما أن $٢١٦,\overline{٣١٢}$ = $\longrightarrow$ ٢١٦,٣١٢٣١٢٣١٢

وإن $٦,\overline{٣١٢}$ = $\longrightarrow$ ٦,٣١٢٣١٢٣١٢

∴ ناتج الطرح = $\longrightarrow$ ٢١٠,٠٠٠٠٠٠٠

مما سبق نستطيع أن نحول العدد النسبي الدوري إلى الصورة $\frac{أ}{ب}$ بتتبع الخطوات التالية :

إذا أردنا مثلاً أن نحول العدد $٠,\overline{٦}$ إلى الصورة $\frac{أ}{ب}$

نفرض س = $٠,\overline{٦}$ (١)

نضرب العدد في ١٠ ، ١٠س = $٦,\overline{٦}$ (٢)

نطرح (١) من (٢) ، ٩س = ٦

$$\therefore \quad س = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$$

لاحظ أننا ضربنا في ١٠ لأن رقماً واحداً هو الذي يتكرر في هذا العدد

مثال (٣) :

حول ما يأتي إلى الصورة $\frac{أ}{ب}$:

(أ) $٠,\overline{١٥}$

(ب) $٠,\overline{١٣٢}$

(ج) $٢,٣\overline{٦}$

الحل :

(أ) نفرض أن س = $٠,\overline{١٥}$ (١)

$\therefore$ ١٠٠س = $١٥,\overline{١٥}$ (٢)

بطرح (١) من (٢) ٩٩س = ١٥

$$\therefore \quad س = \frac{١٥}{٩٩} = \frac{٥}{٣٣}$$

$$\therefore \quad ٠,\overline{١٥} = \frac{٥}{٣٣}$$

(ب) نفرض أن س = $٠,\overline{١٣٢}$ (١)

$\therefore$ ١٠٠٠س = $١٣٢,\overline{١٣٢}$ (٢)

$\therefore$ بطرح (١) من (٢) ٩٩٩س = ١٣٢

$$\therefore \quad س = \frac{١٣٢}{٩٩٩} = \frac{٤٤}{٣٣٣}$$

$$\therefore \quad ٠,\overline{١٣٢} = \frac{٤٤}{٣٣٣}$$

نفرض أن س = $٢,٣\overline{٦}$ (١)

∴ ١٠س = $٢٣,\overline{٦}$ (٢)

∴ ١٠٠س = $٢٣٦,\overline{٦}$ (٣)

بطرح (٢) من (٣) : ٩٠س = ٢١٣

$$∴ س = \frac{٢١٣}{٩٠} = \frac{٧١}{٣٠}$$

$$∴ ٢,٣\overline{٦} = \frac{٧١}{٣٠}$$

لاحظ في هذا المثال إننا ضربنا أولاً في ١٠ ثم ضربنا الناتج في ١٠ مرة أخرى ليسهل طرح الناتج الأول ١٠س من الناتج الثاني ١٠٠س .

تمرين (١–٣)

(١) جد قيم ما يأتي :

(أ) $٠,\overline{٩} \times ١٠$

(ب) $١٦,\overline{٦} \times ١٠$

(ج) $٣,\overline{٢٧} \times ١٠٠$

(د) $٨,٠\overline{٣١٥} \times ١٠٠$

(٢) جد ناتج الطرح فيما يأتي :

(أ) $٩٦,\overline{٨٥} - ٠,\overline{٨٥}$

(ب) $٩,\overline{٩} - ٧,\overline{٩}$

(ج) $٣٠١,\overline{٠١} - ٣,\overline{٠١}$

(د) $٤١٦,\overline{٤٧} - ١٦,\overline{٤٧}$

(٣) حول ما يأتي إلى الصورة $\frac{أ}{ب}$:

(أ) $٠,\overline{٥}$ (ب) $١,\overline{٩}$

(جـ) $٠,\overline{٧٣}$ (د) $٠,\overline{٩٠٩}$

(هـ) $١,\overline{٢٣}$ (و) $٢,٥\overline{٤}$

(ز) $٤,٥\overline{٦}$ (ح) $٣,٠\overline{٢٣}$

الدرس الرابع : مجموعة الأعداد غير النسبية :

تعرفنا طرق تحويل أعداد مثل $٠,\overline{٣}$ ، ٠,٧٥ ، ٢,٢٥ ، $١,\overline{٢٣}$ ، ٦,٣٧٢ إلى الصورة $\frac{أ}{ب}$ ، ب ≠ ٠

وعلمنا أن مثل هذه الأعداد بنوعيها هي أعداد نسبية .

(١) أنظر إلى الأعداد ⟵ ٠,١٠١٠٠١٠٠٠١

⟵ ٠,٢٠٢٢٠٠٢٢٢٠٠٠٢٢٢٢ ، ⟵ ٠,٦٢٦٢٢٢٦٢٢٢

- هل هذه الكسور العشرية منتهية ؟
- هل يتكرر عدد واحد ؟
- هل تتكرر مجموعة أعداد ؟
- هل يمكن كتابتها بالصورة $\frac{أ}{ب}$ ؟

(٢) علمنا أيضاً كيفية إيجاد الجذور التربيعية لأعداد مثل ٩ ، ١٦ ، ٦٤ ، ١٤٤ ، ٠٠٠ ماذا نسمي هذه الأعداد ؟

جد :

$\sqrt{\frac{٩}{١٦}}$ ، $\sqrt{\frac{٣٦}{٤٩}}$ ، $\sqrt{\frac{١٢١}{١٤٤}}$ ، $\sqrt{٢\frac{٧}{٩}}$ ، $\sqrt{٢\frac{٤١}{٦٤}}$ ، $\sqrt{١,٤٤}$ ، $\sqrt{١٢,٢٥}$

* هل هي أعداد نسبية ؟

(٣) هل يمكنك إيجاد قيم $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٥}$ ، $\sqrt{٠,٣٧}$ ، $\sqrt{\frac{١٣}{٢٩}}$

- هل الأعداد ٣ ، ١٥ ، ٠,٣٧ ، ١٣ ، ٢٩ مربعات كاملة ؟
- هل يمكنك إيجاد الجذور التربيعية لمثل هذه الأعداد بحيث يمكن وضعها في الصورة $\frac{أ}{ب}$ ؟
- الأعداد في (١) ، (٣) أعلاه لا يمكن وضعها في الصورة $\frac{أ}{ب}$.

مثل هذه الأعداد لا تنتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية وتسمى الأعداد **غير النسبية** .

في دراستنا السابقة وجدنا أنّ :

ط ⊂ لع ⊂ ص ⊂ ن

ومن الواضح أن لع توسيع للمجموعة ط ، ص توسيع للمجموعة لع حيث يمكن حل معادلات في ص إجاباتها غير موجودة في لع. ن توسيع للمجموعة ص مما مكنّنا من إيجاد حلول لمعادلات في ن إجاباتها غير موجودة في ص. والواقع أن هنالك مسائل إجاباتها غير موجودة في ن مما دفع الرياضيين للبحث عن أعداد أخرى غير النسبية مثل :

$\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{١٣}$ ، $\sqrt{٩١}$ وذلك للإجابة على معادلات مثل س = $\sqrt{٢}$ ، س = $\sqrt{٧}$

وعند البحث عن الجذور التربيعية لأعداد ليست مربعات كاملة فإن الكسر العشري الناتج لا ينتهي إطلاقاً ، واستمراره لا يكون بصورة الكسر الدوري الذي عرفناه . فلذلك فهي كسور عشرية غير منتهية وغير دورية .

بالإضافة لأعداد مثل ← ٠,٥٠٥٥٠٠٥٥٥

← ٣,٢٧٢٢٧٢٢٢٧ ، وغيرها . ومن الأعداد غير النسبية المشهورة العدد π ويكتب بصورة تقريبية $\frac{٢٢}{٧}$ أو ٣,١٤ .

تعريف :

> تسمى الأعداد التي يكون تمثيلها العشري غير منتهي وغير دوري أعداد غير نسبية ويرمز لها بالرمز $ن^{*}$.
>
> ولا يمكن التعبير عن مثل هذه الأعداد على الصورة $\frac{أ}{ب}$، أ ، ب $\in$ ص ب $\neq$ ٠

مثال :

وضح ما إذا كان كل عدد مما يأتي عدداً نسبياً أو غير نسبي :

(١) $\sqrt{\frac{١٦}{١٤^{٢}}}$ (٢) $\sqrt{\frac{١٦٩}{٢٢٥}}$ (٣) ← ٠,٢١١٢٢١١١٢٢٢

(٤) $١,\overline{٦٢٥}$ (٥) $\sqrt{٩٣}$ (٦) $\sqrt{٦,٢٥}$

الحل :

(١) $\sqrt{\frac{١٦}{١٤^{٢}}} = \frac{٤}{١٤} = \frac{٢}{٧}$ عدد نسبي .

(٢) $\sqrt{\frac{١٦٩}{٢٢٥}} = \frac{١٣}{١٥}$ عدد نسبي .

(٣) ← ٠,٢١١٢٢١١١٢٢٢ عدد غير نسبي لأن الكسر العشري غير منته وغير دوري .

(٤) $١,\overline{٦٥٢}$ عدد نسبي لأن الكسر دوري

(٥) $\sqrt{٩٣}$ عدد غير نسبي لأن ٩٣ ليس مربعاً كاملاً .

(٦) $\sqrt{٦,٢٥} = ٢,٥ = \frac{٥}{٢}$ عدد نسبي .

تمرين (١ – ٤)

وضّح الأعداد النسبية وغير النسبية فيما يأتي :

(١) $\sqrt{\frac{٩}{٤٩}}$ (٢) $\sqrt{١,٤٤}$ (٣) $\longrightarrow ٠,٦٢٦٦٦٢٦٦٦$

(٤) $\sqrt{\frac{١٦}{{}^{٢}١٧}}$ (٥) $\sqrt{٢٨٩}$ (٦) $\sqrt{٢٣}$ (٧) $\sqrt{\frac{٣٦}{٣٧}}$

(٨) $١,\overline{٣}$ (٩) $٢,\overline{٥٦٧}$ (١٠) $\sqrt{\frac{١٥}{٢٧}}$

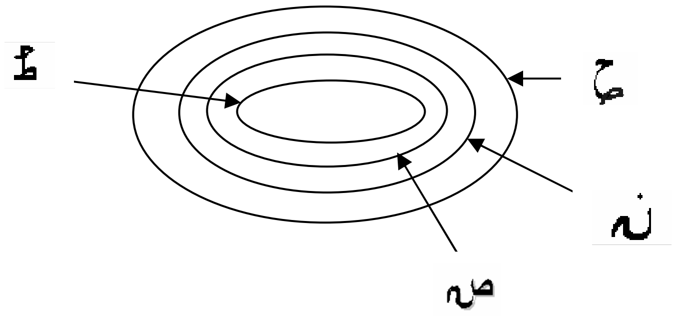
الدرس الخامس : مجموعة الأعداد الحقيقية

تعرفنا حتى الآن مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة أعداد أخرى تسمى الأعداد غير النسبية ، فإذا كونا مجموعة تتألف من هذين النوعين من الأعداد معاً (الاتحاد بينهما) نحصل على مجموعة جديدة تسمى **مجموعة الأعداد الحقيقية** وهي مجموعة غير منتهية ونرمز لها بالرمز ح

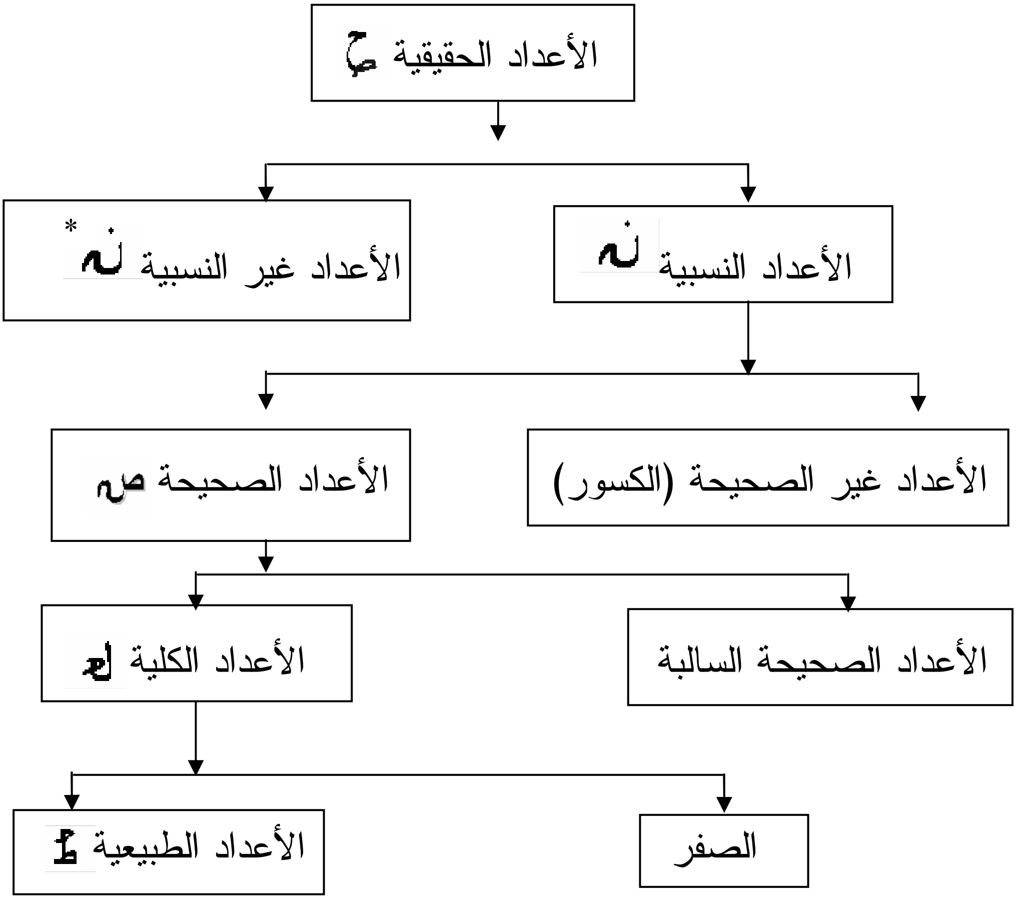
$$\boxed{\text{ح} = \text{ن} \cup \text{ن}^{*}}$$

ط ⊂ لع ⊂ ص ⊂ ن ⊂ ح

وبشكل فن :



الشكل الآتي يوضح المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقية :



الدرس السادس : تمثيل مجموعة الأعداد الحقيقية على خط الأعداد :

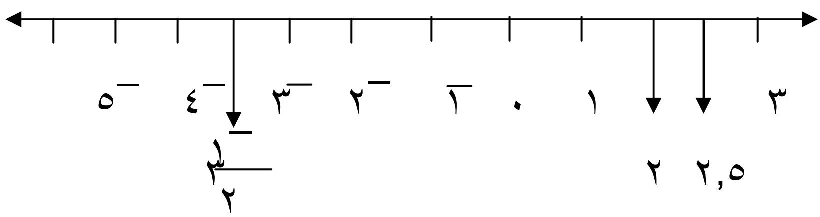
تعلمنا من دراستنا السابقة كيف تمثل الأعداد الصحيحة والنسبية بنقط على خط الأعداد . ونعلم أن المستقيم الذي يمثل خط الأعداد به مجموعة غير منتهية من النقط .

كما أن مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة غير منتهية من الأعداد ومهما حددنا نقاط على خط الأعداد تمثل أعداداً نسبية ، فإن هذه النقاط لا تملأ هذا الخط ولكن إذا قمنا بإضافة نقاط على هذا الخط تمثل الأعداد غير النسبية فإنها تملأ هذا الخط .

ولتمثيل الأعداد الحقيقية بنقط على خط الأعداد نختار عليه نقطة أصل واحدة ووحدة طول ، ثم نستكمل تدريج المستقيم فيكون لكل عدد حقيقي نقطة وحيدة تمثله على هذا الخط ، كما أن كل نقطة من هذا الخط تكون ممثلة لعدد حقيقي وحيد أي أن هناك تقابلاً بين الخط المستقيم ومجموعة الأعداد الحقيقية .

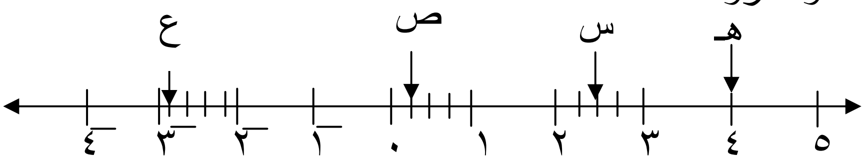
يوجد تقابل بين مجموعة نقط خط الأعداد ومجموعة الأعداد الحقيقية .

أمثلة لنقاط من ح ممثلة على خط الأعداد :



تمرين (١–٥)

(١) أكتب الأعداد الممثلة على خط الأعداد والمشار إليها بالأسهم والحروف :



(٢) أرسم خطاً للأعداد ومثل عليه الأعداد التالية :

(أ) ‾٣ (ب) ١ ‾١/٤ (جـ) ٢ ١/٥ (د) ٢ ‾١/٢

الدرس السابع : خواص العمليات على مجموعة الأعداد الحقيقية :

في الصف السابع تعرفنا بعض الخواص المتعلقة ببعض العمليات على مجموعة الأعداد الصحيحة ومجموعة الأعداد النسبية وسنستعرض فيما يلي هذه الخواص والمتعلقة بعمليتي الجمع والضرب على مجموعة الأعداد الحقيقية .

{١} الإغلاق :

(أ) المجموعة ح مغلقة تحت عملية الجمع : أي أن حاصل جمع العددين الحقيقيين هو عدد حقيقي أيضاً .

مثلاً : ٢ + ٣ = ٥ ∋ ح

(√٣ + ١) ∋ ح

(٢ + √٥) ∋ ح

أي لكل س ، ص ∈ ح ، (س + ص) ∈ ح

(ب) المجموعة مغلقة تحت عملية الضرب : أي أن حاصل ضرب العددين الحقيقيين هو عدد حقيقي أيضاً .

$٢ \times ٣ = ٦ \in$ ح

$٥ \times \sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢} \in$ ح

$٣ \times ١,\overline{٦} = ٤,\overline{٩} \in$ ح

$\sqrt{٢} \times \sqrt{٥} = \sqrt{١٠} \in$ ح

{٢} الإبدال :

(أ) لكل س ، ص ∈ ح ، س + ص = ص + س

(ب) لكل س ، ص ∈ ح ، س ص = ص س

مثلاً :

$٧ + ٥ = ٥ + ٧ = ١٢$

$٣,٥ \times ٠,٠٢ = ٠,٠٢ \times ٣,٥ = ٠,٠٧٠$

{٣} التجميع :

(أ) لكل س ، ص ، ع ∈ ح ، (س + ص) + ع = س + (ص + ع)

(ب) لكل س ، ص ، ع ∈ ح ، (س ص) ع = س (ص ع)

مثلاً :

$(٧ + {}^{-}٢) + ٣ = ٥ + ٣ = ٨$

$٧ + ({}^{-}٢ + ٣) = ٧ + ١ = ٨$

وكذلك : $\left(\frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٤}\right) \times {}^{-}٥ = \frac{٢}{٢٠} \times {}^{-}٥ = \frac{{}^{-}١}{٢}$

$\frac{٢}{٥} \times \left(\frac{١}{٤} \times {}^{-}٥\right) = \frac{٢}{٥} \times \frac{{}^{-}٥}{٤} = \frac{{}^{-}١}{٢}$

{٤} توزيع الضرب على الجمع :

لكل س ، ص ، ع $\in$ ح

س(ص + ع) = س ص + س ع

مثلاً :

٠,٩(١ + ٠,٢) = ٠,٩ × ١,٢ = ١,٠٨

٠,٩ × ١ + ٠,٩ × ٠,٢ = ٠,٩ + ٠,١٨ = ١,٠٨

{٥} العنصر المحايد للجمع :

هنالك عنصر محايد للجمع في ح هو (٠) بحيث لكل س $\in$ ح ،

س + ٠ = س ، ٠ + س = س

مثلاً :

$^{-}٣$ + ٠ = $^{-}٣$ ، ٠ + ٧ = ٧

{٦} العنصر المحايد للضرب :

هنالك عنصر محايد للضرب في ح وهو (١) بحيث لكل س $\in$ ح ،

س × ١ = س

١ × س = س

{٧} النظير الجمعي :

لكل س ∋ ح يوجد ($^-$س) ∋ ح بحيث $^-$س + (س) = ٠ ∋ ح

يسمى ($^-$س) النظير الجمعي للعدد س ويسمى س النظير الجمعي للعـــدد ($^-$س) .

مثلاً :

٩ + $^-$٩ = ٠

{٨} النظير الضربي :

لكل س (غير الصفر) ، ∋ ح يوجد $\frac{١}{س}$ ∋ ح

بحيث س × $\frac{١}{س}$ = ١ ∋ ح

يسمى $\frac{١}{س}$ النظير الضربي (المقلوب) للعدد س .

٣ نظير ضربي للعدد $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٤}{٥}$ النظير الضربي للعدد $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{^-٦}{٧}$ النظير الضربي للعدد $\frac{^-٧}{٦}$

$\frac{س}{ص}$ × $\frac{ص}{س}$ = ١ لأن $\frac{س}{ص}$ هي النظير الضربي للعدد $\frac{ص}{س}$

{٩} الاختزال :

(أ) لكل س ،ص ، ع ∋ ح، إذا كان س +ص =س + ع فأن ص = ع

(ب) لكل س ،ص ، ع ∋ ح، إذا كان س ص = س ع فأن ص = ع

(س ≠ ٠)

مثلاً :

إذا كان س + ٥ = ص + ٥ فإن س = ص

وإذا كان $\frac{٣}{٥}$ س = $\frac{٣}{٥}$ ص فإن س = ص

تمرين (١–٦)

(١) أكمل الجدول وفق الخواص في العمليات على مجموعات الأعـــداد الموضحة :

مجموعة الأعداد	الإغلاق		الإبدال		التجميع		العنصر المحايد		النظير	
	+	×	+	×	+	×	+	×	+	×
الطبيعية	√								×	
الكلية		√					√			
الصحيحة			√				√			
النسبية					√					
الحقيقية		√					√			

(٢) أذكر الخاصية المستخدمة في كل من العمليات التالية :

(أ) ٥ + س = س + ٥

(ب) ١٣ × ١ = ١٣

(جـ) $^-$٧ + ٧ = ٠

(د) ٣ (أ + ب) = ٣ أ + ٣ ب

(هـ) إذا كان ٦ص = ١٢ فإن ص = ٢

(و) $\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢} = ١$

(ز) إذا كان س + ٥ = ٩ ، ∴ س = ٤

(ح) ٤ + (٣ + س) = ٧ + س

الوحدة الثانية

التطبيق (الدالة)

تمرين مراجعة

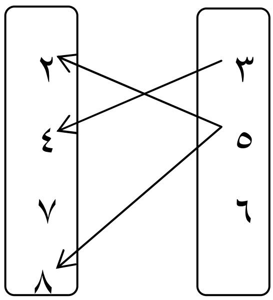
(١) أكمل تعريف العلاقة التالية :

العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعتين تسمى المجموعة الأولى ………………. وتسمى المجموعة الثانية ……………….

(٢) إذا كانت س = { ١ , ٥} , ص = { ٢ , ٤}

جد (أ) س × س (ب) ص × س (جـ) ص × ص

(٣) ع : أ إلى ب علاقة معرفة بالمخطط السهمي التالي :



أ ب

جد :

(أ) المجال والمجال المقابل للعلاقة ع

(ب) أكتب ع في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة .

(جـ) أكتب مدى العلاقة ع

(د) أرسم المخطط السهمي للعلاقة العكسية ع $^{-1}$

(٤) إذا كانت س = { أ , ب , جـ , د }

ع : س ⟵ س معرفة كالآتي :

ع = { (أ , جـ) , (جـ , د) , (ب , ب) , (ب , جـ) }

جد :

(أ) مدى العلاقة ع

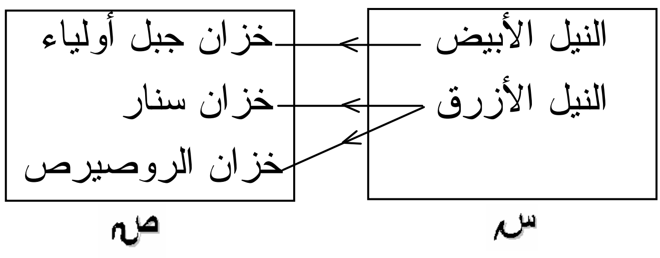
(ب) المخطط السهمي للعلاقة ع

(جـ) العلاقة العكسية ع $^{-1}$ في صورة مجموعة .

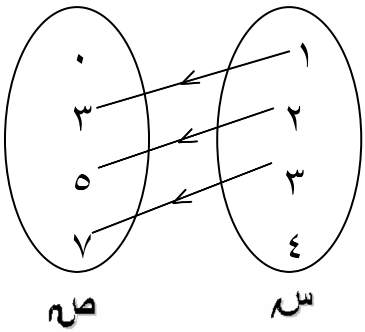
التطبيق (الدالة)

الدرس الأول : تعريف التطبيق (الدالة) :

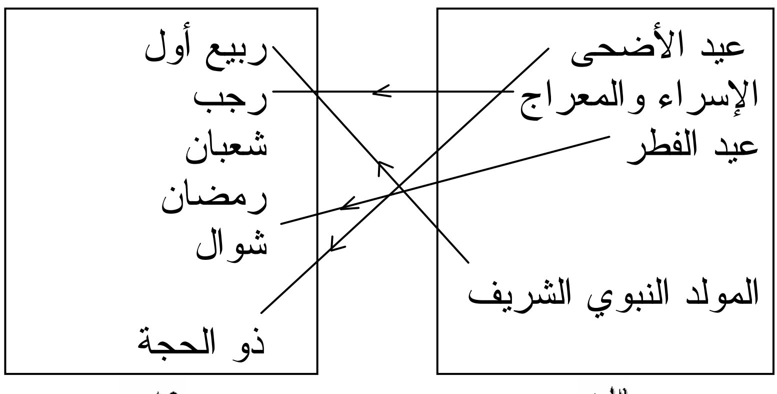
المخططات السهمية في الأشكال (٢-١) , (٢-٢) , (٢-٣) الآتية تمثل علاقة معرفة من س إلى ص. تأمل كلاً منها , ماذا تلاحظ ؟



الشكل (٢-١)



الشكل (٢-٢)



الشكل (٢-٣)

في العلاقة الأولى الشكل (٢–١) يوجد عنصر في سهـ ارتبط بعنصرين في صهـ , (النيل الأزرق , خزان سنار) (النيل الأزرق , خزان الروصيرص) , في العلاقة الثانية شكل (٢–٢) يوجد عنصر في سهـ لم يرتبط بأي عنصر في صهـ(العنصر ٤) . أما بالنسبة للعلاقة الثالثة : شكل (٢–٣) فنلاحظ أن كل عنصر في سهـ قد ارتبط بعنصر واحد وواحد فقط في صهـ إذ خرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر صهـ نسمي مثل هذه العلاقة الأخيرة **تطبيقاً** من سهـ إلى صهـ .

فإذا عبرنا عن هذه العلاقة أو هذا التطبيق في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة كما يلي :

{ (عيد الأضحى , ذو الحجة) , (الإسراء والمعراج , رجب) , (عيد الفطر , شوال) , (المولد النبوي الشريف , ربيع الأول) } فإن إسم كل مناسبة يظهر مرة واحدة فقط كمكون أول في أحد الأزواج المرتبة المحددة للعلاقة . أي أن هذه العلاقة تتميز بأن كل عنصر من عناصر سهـ يظهر كمكون أول في زوج مرتب واحد فقط من هذه الأزواج .

وهذه الخاصية تقودنا إلى التعريف الآتي للتطبيق :

يقال عن العلاقة من مجموعة سهـ إلى المجموعة صهـ أنها تطبيق إذا كان كل عنصر من عناصر سهـ يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر صهـ .

يسمى سهـ **المجال** ويسمى صهـ **المجال المقابل** للتطبيق .

مما سبق نستنتج ما يلي :

(١) أن التطبيق حالة خاصة من العلاقات , وعليه فإن كـل تطبيـق مكون من مجموعتين وقاعدة اقتران .

(٢) إذا كان ع : س ⟵ ص علاقة نقول أن ع تطبيق من س ⟵ ص إذا تحقق الشرطان الآتيان :

(أ) كل عنصر في س يجب أن يقترن بعنصر في ص .

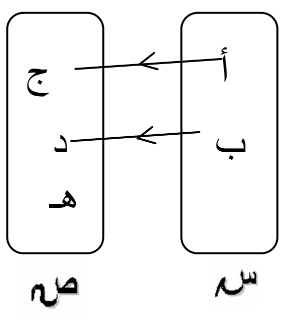
(ب) يجب ألا يقترن عنصر واحد في س بأكثر من عنصر في ص

أي يجب أن يقترن <u>كل</u> عنصر في س بعنصر <u>واحد فقط</u> في ص .

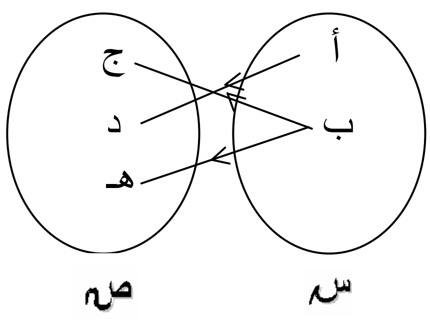
(٣) يمكن أن يقترن عنصران أو أكثر من المجال بعنصر واحد في المجال المقابل .

مثال (١) :

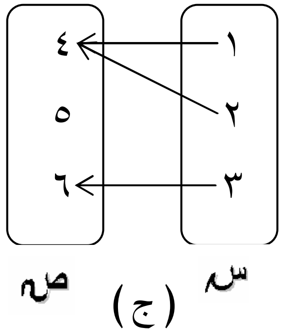
أي العلاقات الآتية تمثل تطبيقاً وأيها لا يمثل تطبيقاً مع ذكر السبب .



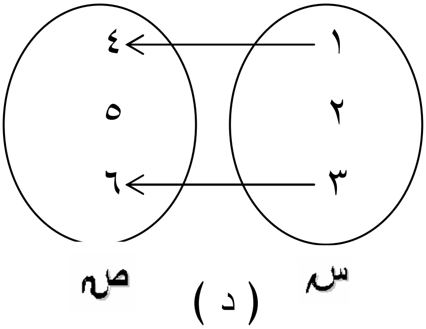
(أ)



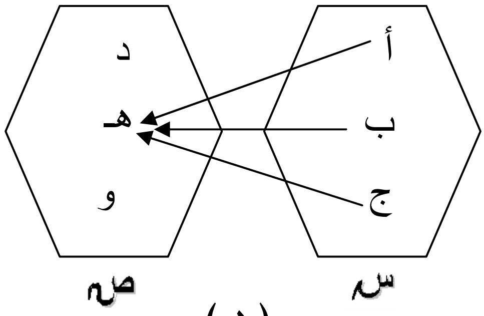
(ب)



(ج)



(د)



(هـ)

الحل :

* العلاقة (أ) تمثل تطبيقاً من س إلى ص إذ أن كل عنصر في س ارتبط بعنصر واحد في ص
* العلاقة (ب) لا تمثل تطبيقاً لأن العنصر ب في س ارتبط بالعنصرين ج , هـ في ص
* العلاقة (ج) تمثل تطبيقاً لأن كل عنصر في س ارتبط بعنصر واحد في ص
* العلاقة (د) لا تمثل تطبيقاً لأن العنصر ٢ في س لم يرتبط بأي عنصر في ص
* العلاقة (هـ) تمثل تطبيقاً لأن كل عنصر في س ارتبط بعنصر واحد في ص

مثال (٢) :

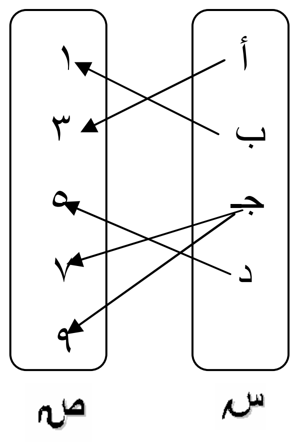
لتكن سـ = { أ , ب , جـ , د }

صـ = { ١ , ٣ , ٥ , ٧ , ٩ }

وكانت ع علاقة من سـ ⟵ صـ حيث :

ع = { (أ , ٣) , (ب , ١) , (د , ٥) , (جـ , ٧) , (جـ , ٩) } مثـــل العلاقة بمخطط سهمي , هل تمثل هذه العلاقة تطبيقاً ؟ أذكر السبب .

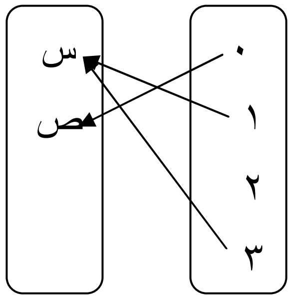
الحل :



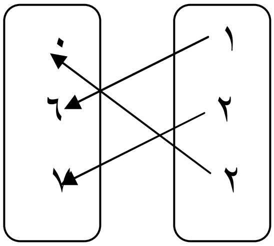
العلاقة لا تمثل تطبيقاً لأن العنصر جـ في سـ ارتبط مع عنصرين في صـ هما ٧ , ٩ .

تمرين (٢-١)

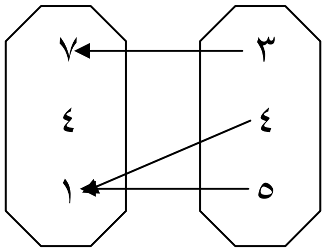
(١) أي الأشكال التالية تعتبر تطبيقاً ولماذا ؟



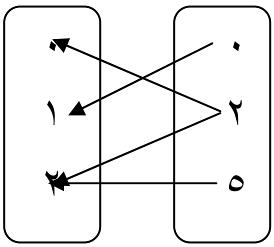
(أ)



(ب)



(ج)



(د)

(٢) أفترض أن أ = { س ، ص ، ط }

ب = { ٠ ، ١ ، ٢ }

أي العلاقات التالية تعتبر تطبيقاً من أ إلى ب ولماذا ؟

$ع_1$ = { (س ، ٠) ، (ص ، ٢) ، (ص ، ١) }

$ع_2$ = { (س ، ٠) ، (ص ، ١) ، (ط ، ٠) }

$ع_3$ = { (س ، ٠) ، (ط ، ١) }

$ع_4$ = { (ص ، ٠) ، (س ، ٠) ، (ط ، ٠) }

(٣) باعتبار أن سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

صـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

أرسم مخططاً سهمياً لكل من العلاقات الآتية والمعرفة من سـ إلى صـ ثم بين أيها يمثل تطبيقاً :

(١) { (١ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٥ ، ٥) }

(٢) { (١ ،٣) ، (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٧) ، (٥ ، ٩) }

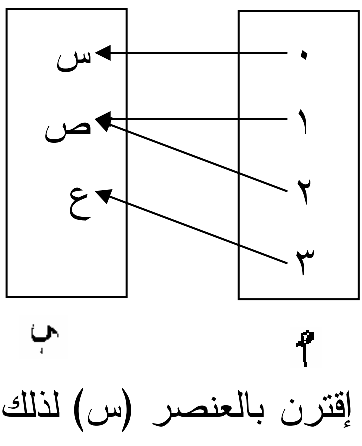
(٣) { (٥ ، ٥) ، (٤ ، ١) ، (٣ ، ٧) ، (٣ ، ٩) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٣) }

(٤) { (١ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ، (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٣) ، (٣ ، ٣) }

الدرس الثاني : صورة العنصر :

إذا كانت العلاقة ت تطبيقاً من م إلى ب فإنها تكتب في الصورة ت : م ⟵ ب وتقرأ ت تطبيق من م إلى ب

وإذا كانت ت : م ⟵ ب معرفة بالمخطط السهمي الآتي :



فإن (٠) إقترن بالعنصر (س) لذلك نسمي (س) صـــورة العنـــصر (٠) ونرمز لصورة العنصر (٠) بالرمز ت (٠)

أي ت (٠) = س

ت (١) = ص

أذكر ت (٢) ، ت (٣)

مثال (١) :

إذا كان د : ط ⟵ ط معرف بالقانون : كل عنصر في ط يقترن مع مربعه فجد د (١) ، د (٣) ، د (٥) ، د (س)

الحل :

بما أن د يقرن كل عنصر بمربعه ومربع العنصر يعني ضربه في نفسه ، فمربع العدد ١ يعني ١×١ ويكتب في الصورة $١^{٢}$ ، إذن :

د (١) = $١^{٢}$ = ١

د (٣) = $٣^{٢}$ = ٩

د (٥) = $٥^{٢}$ = ٢٥

د (س) = $س^{٢}$

الصورة د (س) = $س^{٢}$ تمثل صورة مختصرة لقاعدة اقتران هذا التطبيق ويمكن أن يرمز لصورة العنصر س بالرمز ص فتكتب ص = د (س) ، أو ص = $س^{٢}$ كما تكتب أحياناً على الصورة س ⟵ $س^{٢}$.

مثال (٢) :

إفترض أن التطبيق ق : ص ⟵ ص معرف بالقانون

ق (س) = س + ١

جد : ق (٤) ، ق ($^{-}١$) ، ق ($^{-}٧$) ، ق (٠)

الحل :

بما أن ق (س) = س + ١

∴ ق (٤) = ٤ + ١ = ٥

ق (¯١) = ¯١ + ١ = ٠

ق (¯٧) = ¯٧ + ١ = ¯٦

ق (٠) = ٠ + ١ = ١

مثال (٣) :

إذا كان د : ن ⟵ ن معرف بالقانون :

ص = د (س) = ٢س − ١

جد :

(أ) د (٣) ، د (¯١ / ٢)

(ب) { س : د (س) = ٩ }

(ج) { ص : ص = د (٢) }

الحل :

(أ) بما أن د (س) = ٢س − ١

∴ د (٣) = ٢ × ٣ − ١ = ٥

د (¯١ / ٢) = ٢ × ¯١ / ٢ − ١ = ¯١ − ١ = ¯٢

(ب) { س : د (س) = ٩ } تعني مجموعة قيم س التي صورتها ٩

أي ٢س − ١ = ٩

٢س = ١٠

س = ٥

∴ { س : د (س) = ٩ } = {٥}

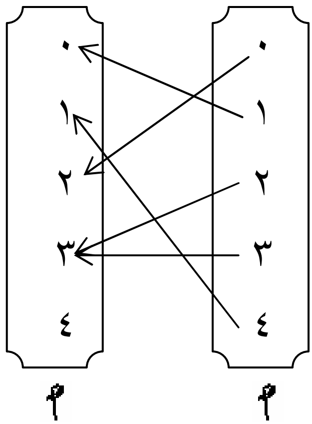
(ج) { ص : ص = د (٢) } تعني مجموعة الصور للعنصر ٢

أي ص = ٢ × ٢ – ١ = ٣

∴ { ص : ص = د (٢) } = {٣}

تمرين (٢–٢)

(١) افترض أن د : م ←—— م معرف بالمخطط السهمي الآتي :



جد :

د (٠) ، د (٢) ، د (٣) ، د (٤)

عبر عن د في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة .

(٢) أكتب القانون أو قاعدة الإقتران لكل مما يأتي مستخدماً الرمز س :

(أ) د : ط ←—— ط تقرن كل عنصر بثلاثة أمثاله .

(ب) د : ص ←—— ص تقرن كل عنصر بمربعه زائداً ٣

(ج) د : ن ←—— ن تقرن العنصر بنفسه .

(٣) إذا كان د : صہ ⟵ صہ معرف بالقانون

ص = س^{٢} + ١

جد :

(أ) د ($^{-}$١) ، د (٠) ، د (٢)

(ب) { س : د (س) = ٢ }

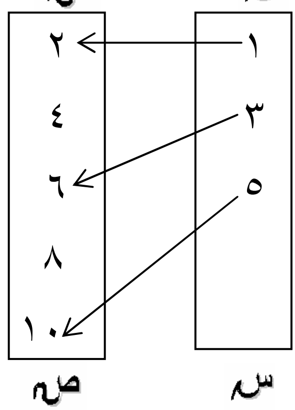
(ج) { ص : ص = د ($^{-}$٣) }

الدرس الثالث : مدي التطبيق :

إذا كان سہ = { ١ ، ٣ ، ٥ }

صہ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

د : سہ ⟵ صہ معرف بالمخطط السهمي في الشكل (٢–٤)



الشكل (٢–٤)

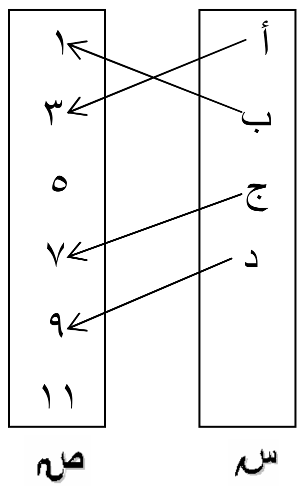
سہ هي مجال التطبيق ، صہ هي المجال المقابل له ، العناصر ٢ ، ٦ ، ١٠ هي صور العناصر ١ ، ٣ ، ٥ على الترتيب تسمى المجموعة { ٢ ، ٦ ، ١٠ } **مدى التطبيق** إذن مدى التطبيق هو مجموعة جميع صور عناصر المجال وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل .

مثال (١) :

لتكن سـ = { أ ، ب ، ج ، د }

صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ }

ت : سـ ⟵ صـ معرف بالمخطط السهمي في الآتي :



جد :

(أ) ت (أ) ، ت (ج) ، ت (د)

(ب) مدى التطبيق ت

الحل :

(أ) ت (أ) = ٣

ت (ج) = ٧

ت (د) = ٩

(ب) مدى التطبيق ت = { ١ ، ٣ ، ٧ ، ٩ }

مثال (٢) :

إذا كان ق : سم ⟵ ط

حيث سم = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

وقاعدة الاقتران هي س ⟵ س + ٤

- ما مدى التطبيق ق ؟

الحل :

بما أن قاعدة الاقتران هي س ⟵ س + ٤

فإن ٢ ⟵ ٢ + ٤ = ٦

٣ ⟵ ٣ + ٤ = ٧

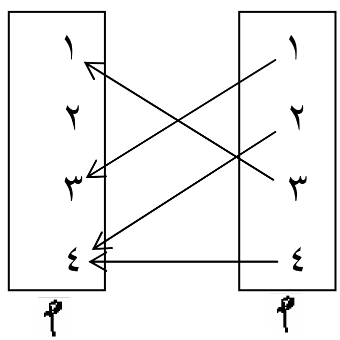
٤ ⟵ ٤ + ٤ = ٨

٥ ⟵ ٥ + ٤ = ٩

ويكون مدى التطبيق { ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

تمرين (٢–٣)

(١) أ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }، عرف ق : أ ⟵ أ بالمخطط السهمي الآتي :



- ما مدى التطبيق ق ؟

(٢) إذا كان س = { ‾٢ ، ‾١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }

وكان د تطبيقاً من : س ⟵ ط معرف بالقانون :

د (س) = س^{٢} + ١

* ما مدى التطبيق د ؟

(٣) إذا كان س = { ‾١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }

ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٠ ، ‾١ }

ت : س ⟵ ص حيث س ⟵ ٢س + ١

(أ) أرسم مخططاً سهمياً لهذا التطبيق .

(ب) جد المدى لهذا التطبيق .

(٤) تطبيق مجاله س = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٥ } ومجاله المقابل

ص = { ١ ، ٢ ، ٥ ، ٩ ، ١٤ ، ١٧ ، ٢٠ }

وقاعدة الاقتران هي : العنصر يقترن مع ثلاثة أمثاله زائداً ٢

(أ) أكتب قاعدة الاقتران بالرموز .

(ب) أرسم المخطط السهي للتطبيق .

(ج) جد مدى التطبيق .

(٥) إذا كان د : ط ⟵ ط تقرن كل عدد طبيعي زوجي بالعدد (٢)

وكل عدد طبيعي فردي بالعدد (١) .

جد مدى د .

(٦) إفترض أن التطبيق

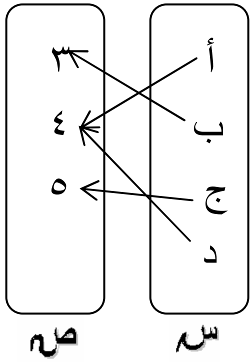
د = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥) }

(أ) ما مجال التطبيق د ؟

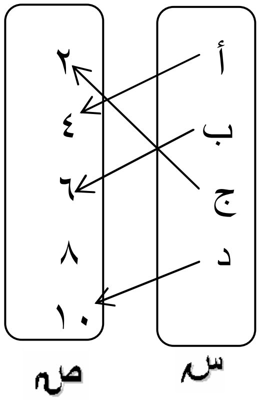
(ب) ما مدى التطبيق د ؟

الدرس الرابع : أنواع من التطبيقات

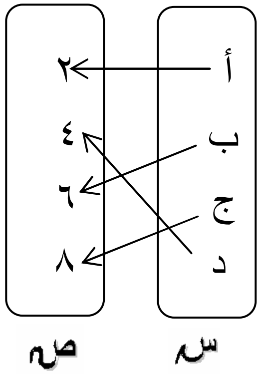
تأمل المخططات السهمية الثلاثة الآتية :



الشكل (٢–٥)



الشكل (٢–٦)



الشكل (٢–٧)

- كل من هذه المخططات السهمية تعبر عن تطبيق . لماذا ؟

نحن نعلم أن الصفة العامة لأي تطبيق من س إلى ص تتضمن أمرين هما :

(١) أن يخرج سهم واحد من كل عنصر من عناصر المجموعة س.
هذا عن عناصر المجموعة س فما هو الحال بالنسبة لعناصر المجموعة ص ؟

(٢) نعلم أن أي عنصر من عناصر ص قد يصله سهم واحد أو أكثر ، كما أنه قد لا يصله أي سهم على الإطلاق .

- من هنا نستطيع تصنيف التطبيقات تبعاً لما يحدث لعناصر ص :

(١) التطبيق الشامل :

إذا وصل لكل عنصر من عناصر ص سهم واحد على الأقل ، أي إذا كان كل عنصر من ص صورة لعنصر واحد على الأقل من عناصر س نقول إن التطبيق يكون قد شمل جميع عناصر ص أو بمعنى آخر أن

أن يكون مدى التطبيق مساوياً المجال المقابل . وهذا يقودنا إلى التعريف الآتي :

نقول عن التطبيق د إنه تطبيق شامل إذا كان مداه مساوياً لمجاله المقابل .   **أي إذا كان كل عنصر في المجال المقابل صورة لعنصر ما في المجال .**

ويكون التطبيق غير شامل إذا ما وجد عنصر واحد على الأقل في المجال المقابل لا يقترن به أي عنصر من المجال .

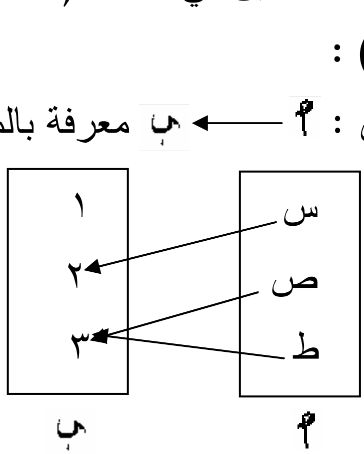
مثلاً التطبيق في الشكل (٢–٥) تطبيق شامل إذ أن :

مدى التطبيق = { ٣ ، ٤ ، ٥ } = المجال المقابل أما التطبيق في شكل (٢–٦) فليس شاملاً لأن مدى التطبيق = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١٠ } أما المجال المقابل = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

هل التطبيق في الشكل (٢–٧) شامل ؟

مثال (١) :

ق : أ ⟵ ب معرفة بالمخطط السهمي التالي :



- هل ق تطبيق شامل ؟

الحل :

ق تطبيق غير شامل لأن مدى ق = { ٢ ، ٣ } بينما

مجاله المقابل = { ١ ، ٢ ، ٣ }

والمدى ≠ المجال المقابل

مثال (٢) :

إفترض أن د : ط ⟵ ط معرف بالقانون د (س) = ٢س

- هل د تطبيق شامل ؟

الحل :

لا لأنه إذا أخذنا مثلاً ٣ ∋ ط (المجال المقابل)

فإننا نلاحظ أنه لا يوجد عنصر س ∋ ط (المجال)

بحيث يكون د (س) = ٣ .

فالمدى لهذا التطبيق هو الأعداد الزوجية فقط من ط

مثال (٣) :

ت : ص ⟵ ص تطبيق يقرن كل عنصر في المجال بالعنصر التالي له مباشرة هل هذا التطبيق شامل .

الحل :

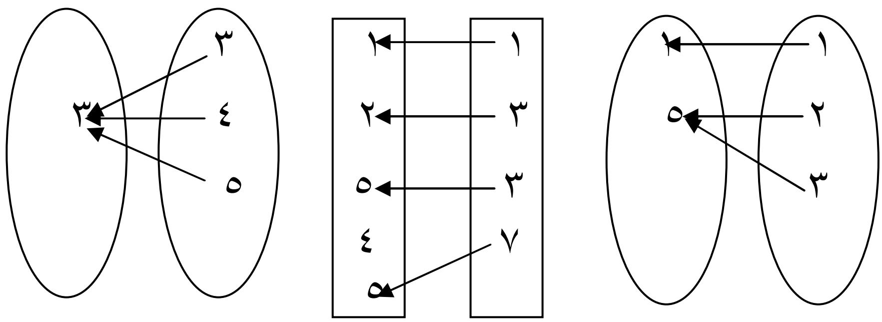
التطبيق شامل لأن كل عنصر في المجال المقابل هو عدد صحيح ، وأي عدد صحيح يمثل صورة للعنصر السابق له مباشرة .

جميع عناصر المجال المقابل تمثل صوراً .

تمرين (٢-٤)

(١) متى يكون د: س ← ص تطبيقاً شاملاً ؟ هات مثالاً لتطبيق شامل ممثلاً بمخطط سهمي .

(٢) أي التطبيقات الآتية تطبيق شامل ولماذا ؟



(أ) (ب) (ج)

(د) د : ط ← ط بالقانون د (س) = س + ٢

(٣) إذا كان د : ص ← ص تطبيق معرف بالقانون د (س) = س^{٢}

هل د تطبيق شامل ؟ ولماذا ؟

(٤) لنفترض أن س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

وأن التطبيق د من س إلى س معرف كما في الجدول (٢-١) :

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٥	٤	١	٥	٣

الجدول (٢-١)

(أ) أرسم مخططاً سهمياً لهذا التطبيق .

(ب) عين مدى التطبيق .

(ج) هل التطبيق شامل ؟ لماذا ؟

الدرس الخامس : التطبيق المتباين أو واحد لواحد (١–١)

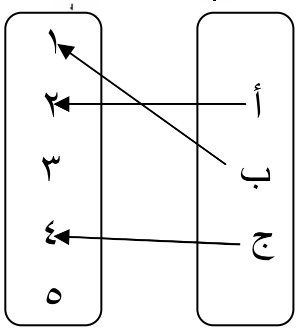
إذا حدث أن كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل ص لا يصله أكثر من سهم واحد فقط أو لا يصله سهم ، نقول إن التطبيق **متباين** . وفي هذه الحالة إذا قصرنا النظر على مدى التطبيق يكون كل عنصر في هذا المدى هو صورة لعنصر واحد بالضبط من عناصر س التطبيق الموضح بالشكل (٢–٦) تطبيق متباين . أما ذلك الذي بالشكل (٢–٥) فغير متباين لأن العنصر ٤ في ص صورة لعنصرين هما أ ، د وهذا يقودنا إلى التعريف الآتي :

نقول عن التطبيق د أنه تطبيق متباين أو واحد لواحد (١–١) إذا كان كل عنصر في مدى التطبيق صورة لعنصر واحد فقط من مجاله .

أو بتعبير آخر إذا لم يوجد عنصران مختلفتان في المجال يقترنان بعنصر واحد في المجال المقابل .

مثال (١) :

نفترض أن ق : أ ⟵ ب معرف بالمخطط السهمي الآتي :



ب أ

نلاحظ أن ق تطبيق متباين .

مثال (٢) :

إفترض أن د : ط ← ط معرف بالقانون :

د (س) = ٢س

هل د تطبيق متباين ولماذا ؟

الحل :

د تطبيق متباين ، لأن صورة العدد الطبيعي هي ضعفه . ولا يوجد عدد طبيعي يمثل الضعف لعددين طبيعيين مختلفين . أي لا يشترك عنصران في المجال في صورة واحدة .

مثال (٣) :

إذا كان د : ص ← ص معرف بالقانون

د (س) = س^{٢}

هل د تطبيق متباين ؟

الحل :

د ليس تطبيقاً متبايناً لأن العنصر ١ ، -١ مثلاً في المجال يقترنان بالعنصر ١ في المجال المقابل وكذلك ٣ ، -٣ مثلاً يقترنان بالعنصر ٩ وهكذا ...

مثال (٤) :

لنفترض أن أ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

ب = { ١ ، ٢ ، ٣ }

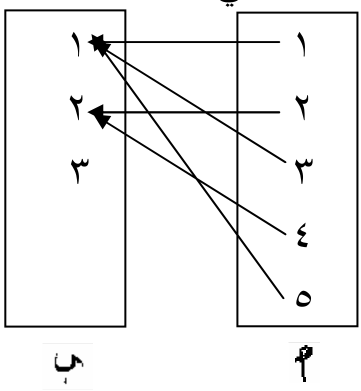
وكان ق : أ ⟵ ب معرف بالعبارة الآتية :

$$ق(س) = \begin{cases} ١ & \text{إذا كان س عدداً فردياً} \\ ٢ & \text{إذا كان س عدداً زوجياً} \end{cases}$$

أرسم المخطط السهمي له ثم وضح أن ق ليس شاملاً ولا متباين .

الحل :

المخطط السهمي



- التطبيق غير شامل لأن ٣ ∈ ب ولا يوجد عنصر س ∈ أ بحيث يكون د (س) = ٣
- التطبيق ق غير متباين لأن العنصرين ٢ ، ٤ مثلاً من أ يرتبطان بالعنصر ٢ من ب أي ق (٢) = ق (٤) = ٢ .

  بينما ٢ ≠ ٤

تمرين (٢-٥)

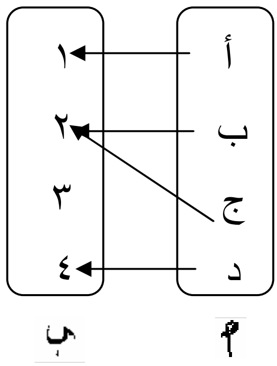
(١) متى يكون التطبيق متباين ؟

(٢) هات مثالاً لتطبيق متباين .

(٣) عرف بمخطط سهمي ق : { ١ ، ٢ ، ٣ } ⟵ { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }
بحيث يكون ق تطبيقاً متبايناً .

(٤) أي التطبيقات الآتية متباين ؟

(أ) د : م ⟵ ب معرف بالمخطط السهمي الآتي :



(ب) د : ط ⟵ ط معرف بالقانون د(س) = س^{٢} +١

(ج) د : ص ⟵ ص معرف بالقانون د (س) = س + ١

(د) د : { ١ ، ٢ ، ٣ } ⟵ { ٥ ، ٧ ، ٩ }
وكان د = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٧)}

(٥) مستخدماً المخططات السهمية أعط مثالاً للتطبيقات الآتية :

(أ) تطبيق متباين وغير شامل .

(ب) تطبيق متباين وشامل .

(ج) تطبيق شامل وغير متباين .

(د) تطبيق غير متباين وغير شامل .

الدرس السادس : التقابل :

تقول عن التطبيق د : س ← ص انه **تقابل** إذا كان شاملاً ومتبايناً في الوقت نفسه . أي إذا حقق الشرط التالي :

أياً كان ص∋ ص ، يوجد عنصر واحد فقط س ∋ س بحيث يكون د (س) = ص ، فالتطبيق المبين في الشكل (٢-٧) هو تطبيق شامل ومتباين ، لذا نقول عنه أنه تقابل .

مثال (١) :

إذا كان س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ص = { ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ }

ت : س ←—— ص بحيث ت (س) = س^{٢}

بين نوع التطبيق .

الحل :

ت (١) = ١ ، ت (٢) = ٤

ت (٣) = ٩ ، ت (٤) = ١٦

إن ت متباين لأنه لأي عنصرين مختلفين في المجال صورتين مختلفتين في المجال المقابل .

ت شامل لأن المدى = { ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ } = المجال المقابل .

∴ التطبيق متباين وشامل .

∴ التطبيق تقابل .

مثال (٢)

إذا كان ت : ط ⟵ ط ، ت (س) = ٢س + ٥ بيّن فيما إذا كان التطبيق ت تقابلاً مع ذكر السبب .

الحل :

التطبيق ت غير شامل لأن العنصر ٢ مثلاً من المجال المقابل ط لا يمثل صورة لأي عنصر في المجال ط وبما أن التطبيق غير شامل فهو غير تقابل .

تمرين (٢-٦)

(١) إذا كان س = { ‾١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }

ص = { ١ ، ٢ ، ٥ }

ت : س ⟵ ص بحيث ت (س) = $س^{٢}$ + ١

(أ) أكتب ت بذكر عناصره في صورة أزواج مرتبة .

(ب) بين نوع التطبيق ت .

(٢) إذا كان س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥}

هـ : س ⟵ ص بحيث هـ (س) = $س^{٢}$ – ١

(أ) مثل هـ بمخطط سهمي (ب) أكتب مدى التطبيق هـ

(ج) أذكر نوع التطبيق هـ

(٣) إذا كان سـ = {١ ، ٠ ، ‾١}

ت : سـ ⟵ سـ حيث ت (س) = $س^{٢}$

حدد الإجابة الصحيحة مما يأتي :

(أ) ت : شامل ومتباين .

(ب) ت : ليس شاملاً وليس متبايناً .

(ج) ت : متباين وليس شاملاً .

(د) ت : شامل وليس متبايناً .

(٤) إذا كان سـ = {١ ، ٣ ، ٥} ، صـ = {٢ ، ٤ ، ٦}

ت : سـ ⟵ صـ حيث ت = {(١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٦)}

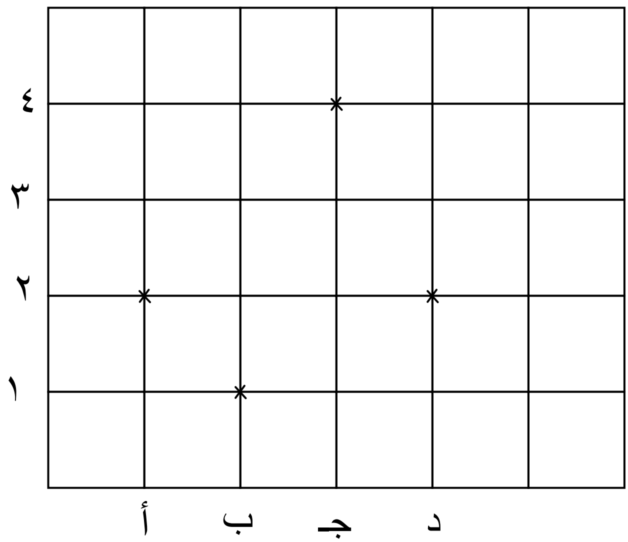
حدد نوع التطبيق ت .

الدرس السابع : تمثيل التطبيق بيانياً

يسمى التمثيل الذي يبين لكل س ∈ سـ صورة ص ∈ صـ بيان التطبيق وقد يكون هذا البيان على شكل مخطط سهمي كما مر بنا .

وهنالك طرق أخرى لتمثيل التطبيق بيانياً منها **التمثيل الشبكي** أو التمثيل بشبكة التربيع . وفي هذه الحالة ترسم شبكة تربيعات كما في الشكل (٢–٨) فإذا أردنا تمثيل التطبيق ت : سـ ⟵ صـ حيث

سـ = { أ ، ب ، جـ ، د } ، صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }



الشكل (٢–٨)

وكان ت = { (أ ، ٢) ، (ب ، ١) ، (جـ ، ٤) ، (د ، ٢) }

فإن عناصر س تمثل على الخط الأفقي كما مبين في الشكل (٢–٨) وتمثل عناصر ص على الرأسي أقصى اليسار . فنجد أن الزوج المرتب (أ ، ٢) يمثل عند تقاطع المستقيمين المارين بالنقطة أ وبالنقطة ٢ بعلامة (×) وأيضاً (ب ، ١) ، (جـ ، ٤) ، (د ، ٢) .

وقد يكون التمثيل في صورة جدول يعين لكل س ∋ س العنصر ص ∋ ص الموجودة تحته مباشرة ويعرف **بالتمثيل الجدولي** كما في الجدول (٢–٢) .

س	أ	ب	جـ	د
ص	٢	١	٤	٢

الجدول (٢–٢)

مثال (١) :

لتكن سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

الجدول (٢-٣) يعين لكل س ∋ سـ العنصر ص ∋ سـ الموجود تحته مباشرة وفق التطبيق .

ت : سـ ⟵ سـ

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٤	٢	٢	٣	٥

الجدول (٢-٣)

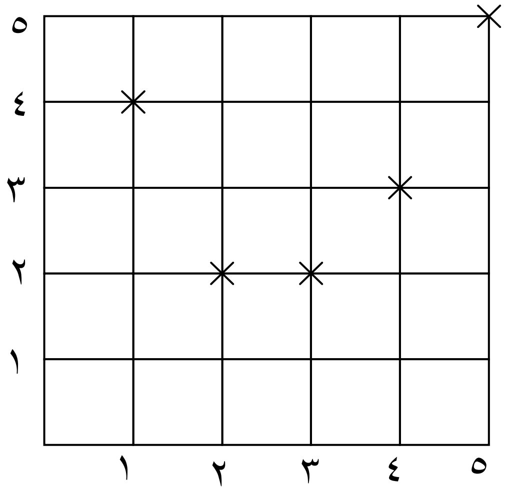
(أ) أرسم بياناً شبكياً لهذا التطبيق .

(ب) هل مدى التطبيق يساوي مجاله المقابل ؟

(ج) هل هنالك عنصر في المجال المقابل هو صورة لأكثر من عنصر في المجال ؟

الحل :

(أ)



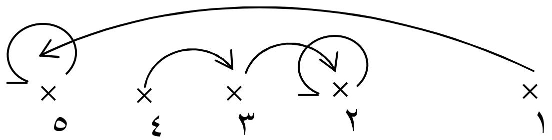
(ب) مدى التطبيق = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

المجال المقابل = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

∴ مدى التطبيق ≠ المجال المقابل

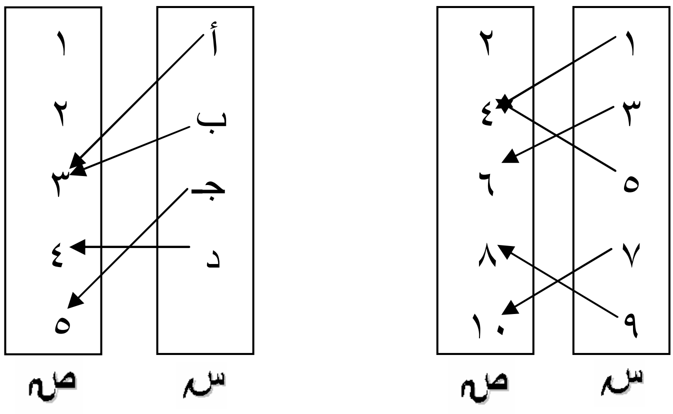
(ج) العنصر ٢ في المجال المقابل هو صورة للعنصرين ٢ ، ٣ من المجال

لاحظ في هذا المثال أن التطبيق من سه ⟵ سه أي أن المجال والمجال المقابل هو المجموعة نفسها وفي هذه الحالة يمكن تمثيله السهمي على هذه الصورة :



تمرين (٢-٧)

(١) أرسم التمثيل الجدولي لكل من التطبيقات الممثلة بالمخططات السهمية الآتية :

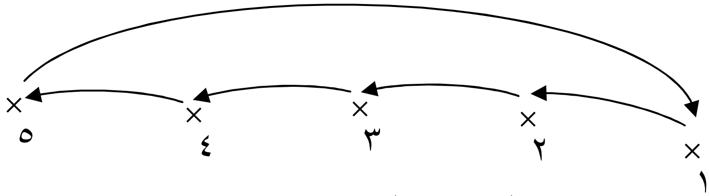


(ب) (أ)

(٢) أرسم البيان الشبكي لكل من التطبيقات في المسألة (١) .

(٣) بفرض أن س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

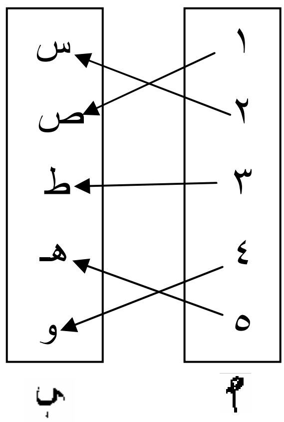
ت : تطبيق من س إلى س ممثل بالشكل الآتي :



مثل هذا التطبيق شبكياً وجدولياً .

الدرس الثامن : التطبيق العكسي :

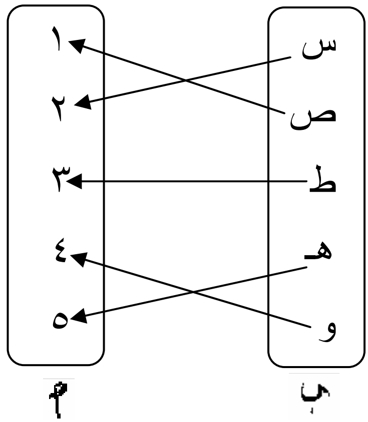
أفترض أن د : أ ⟵ ب تطبيق معرف بالمخطط السهمي التالي الشكل (٢-٩)



الشكل (٢-٩)

إن هذا التطبيق شامل لأن المدى يساوي المجال المقابل ومتباين لأنه لا يوجد عنصران في المجال يقترنان مع عنصر واحد في المجال

المقابل . فإذا عكسنا الأسهم ليصبح المجال المقابل مجالاً والمجال مجالاً مقابلاً أي أخذنا العلاقة العكسية لهذا التطبيق فإننا نحصل على الشكل (٢-١٠) الآتي :



الشكل (٢-١٠)

إن الشكل (٢-١٠) الجديد يمثل تطبيقاً كذلك ، هذا التطبيق يسمى **التطبيق العكسي** للتطبيق د .

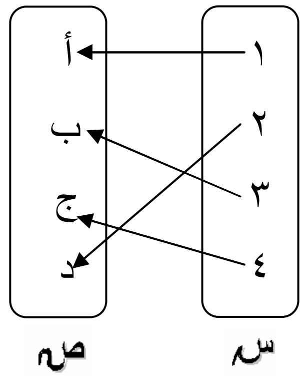
تعريف :

إذا كان د : أ ⟵ ب تطبيقاً شاملاً ومتبايناً فإن التطبيق العكسي له موجود ويرمز للتطبيق العكسي من ب إلى أ بالرمز $د^{-١}$ ويكتب $د^{-١}$: ب ⟵ أ

نسمي $د^{-١}$ التطبيق العكسي للتطبيق د أو معكوس التطبيق د ، وعلى هذا فإن لكل تقابل د تقابل عكسي $د^{-١}$

مثال (١) :

إذا كان التطبيق ر : س ⟵ ص ممثلاً بالمخطط المبين أدناه ، فهل يوجد معكوس لهذا التطبيق ؟ فإن وجد ، جد $ر^{-1}$ (أ) ، $ر^{-1}$ (ب) ، $ر^{-1}$ (جـ) ، $ر^{-1}$ (د) ثم أرسم المخطط السهمي للتطبيق العكسي .



الحل :

يتضح من المخطط السهمي للتطبيق ر أنه تقابل ، إذن فــالتطبيق $ر^{-1}$ موجود

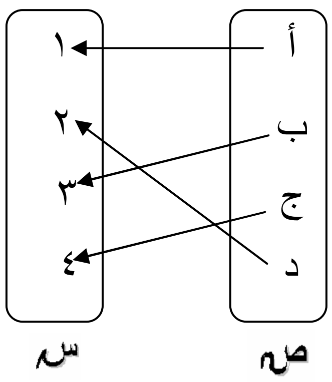
$ر^{-1}$ (أ) = ١

$ر^{-1}$ (ب) = ٣

$ر^{-1}$ (جـ) = ٤

$ر^{-1}$ (د) = ٢

ويكون مخططه السهمي كما هو مبين



مثال (٢) :

إذا كان $\text{أ} = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ \}$

$\text{ب} = \{ ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ \}$

وعرفنا التطبيق ت : أ ⟵ ب حيث ت (س) = ٢س + ١

جد معكوس التطبيق إن وجد .

الحل

ت (١) = ٢ × ١ + ١ = ٣

ت (٢) = ٢ × ٢ + ١ = ٥

ت (٣) = ٢ × ٣ + ١ = ٧

ت (٤) = ٢ × ٤ + ١ = ٩

نلاحظ أن التطبيق تقابل .

∴ $\text{ت}^{-١}$ موجود

وأن : $\text{ت}^{-١}$ (٣) = ١

$\text{ت}^{-١}$ (٥) = ٢

$\text{ت}^{-١}$ (٧) = ٣

$\text{ت}^{-١}$ (٩) = ٤

وإذا تأملنا قاعدة اقتران $\text{ت}^{-١}$ (ص) نجدها $\frac{\text{ص} - ١}{٢}$ وهي ما نحصل عليه إذا تتبعنا الخطوات التالية :

- من قاعدة اقتران التطبيق ت (س) = ٢س + ١

- نضع ص = ت (س) ، أي ص = ٢س + ١
- بطرح ١ من الطرفين : ص – ١ = ٢س
- بقسمة الطرفين على ٢ : $\frac{ص - ١}{٢}$ = س

وبما أن س أصبحت صورة العنصر ص بالتطبيق العكسي ت$^{-١}$ أي ت$^{-١}$ (ص) = س .

∴ ت$^{-١}$ (ص) = $\frac{ص - ١}{٢}$

هذه الخطوات تعرف بخطوات جعل س **موضوعاً للقانون** بعد أن كانت ص هي موضوع القانون .

مثال (٣) :

إذا كان د : ح ⟵ ح تطبيقاً معرفاً بقاعدة الاقتران الآتية :

د(س) = ٣س – ١

جد قاعدة التطبيق العكسي د$^{-١}$

الحل :

بوضع ص = د(س)

∴ ص = ٣س – ١

بجعل س موضوعاً للقانون

ص + ١ = ٣س

$\frac{ص - ١}{٣}$ = س

لكن س = $ت^{-1}$ (ص)

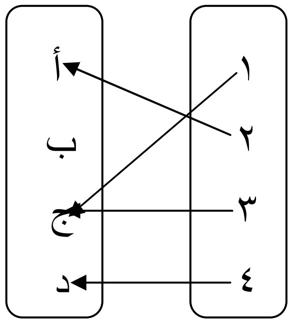
$\therefore$ $ت^{-1}$ (ص) = $\frac{ص - ١}{٣}$

تمرين (٢–٨)

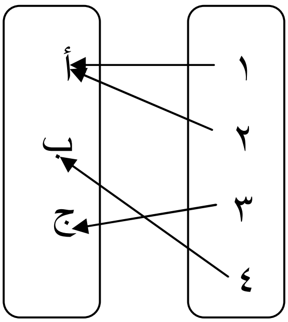
(١) متى يكون معكوس التطبيق تطبيقاً ؟ وما نوع هذا المعكوس ؟

(٢) في الأشكال الآتية :

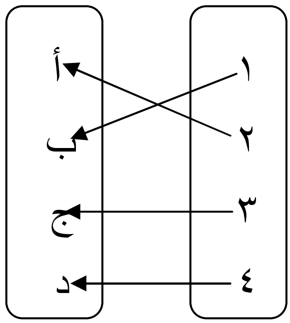
حدد نوع التطبيق وجد التطبيق العكسي حيثما أمكن ذلك .



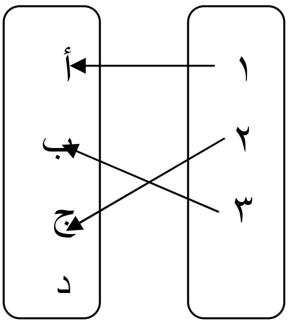
(أ)



(ب)



(ج)



(د)

(٣) افترض أن $\mathfrak{A}$ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

$\mathfrak{B}$ = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٩ }

عرّف د : أ ⟵ ب بالقانون د(س) = س٢

هل يوجد التطبيق العكسي د⁻¹ ؟

إذا كانت الإجابة نعم ، جد د⁻¹ (١) ، د⁻¹ (٩) هات قانوناً نعرف به د⁻¹ .

(٤) افترض أن د : ص ⟵ ص معرف بالقانون د(س) = س − ١

(أ) هل التطبيق العكسي موجود .

(ب) جد د (⁻٥) ، د (⁻١) ، د (١٠)

(ج) إذا كان د⁻¹ موجوداً ، فجد : د⁻¹ (⁻٦) ، د⁻¹ (٣)

(د) أكتب القانون الذي يعرف د⁻¹

(٥) عرف د : ح ⟵ ح بالقانون د (س) = ٢س + ٣

هل د⁻¹ موجود ، إذا كان د⁻¹ موجوداً فجد قانوناً تعرف به د⁻¹

تمرين عام

(١) ر : ط ⟵ ط بحيث ر(س) = س٢ + ١

جد

(أ) ر(٣) ، ر(٥)

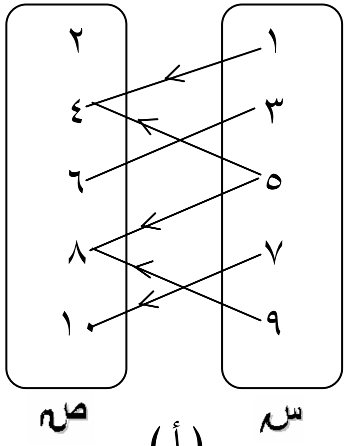
(ب) ما مدى التطبيق ر ؟

(٢) إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

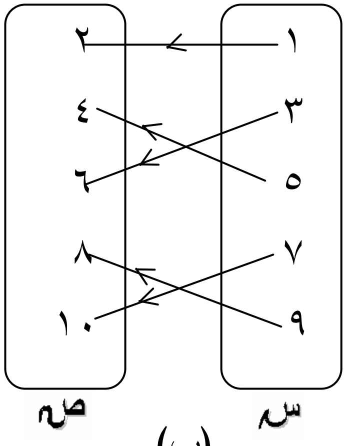
ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

وضح أي المخططات السهمية الآتية تمثل تطبيقاً من س إلى ص ،

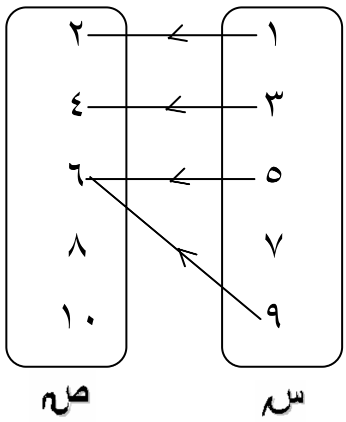
معللاً لإجابتك ، وعين المدى لكل تطبيق .



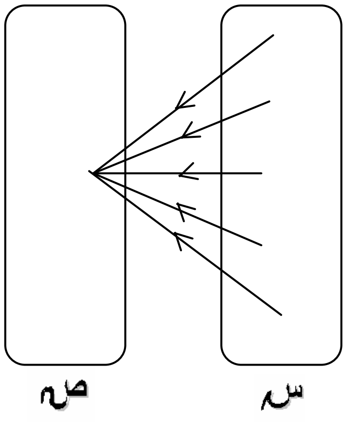
(أ)



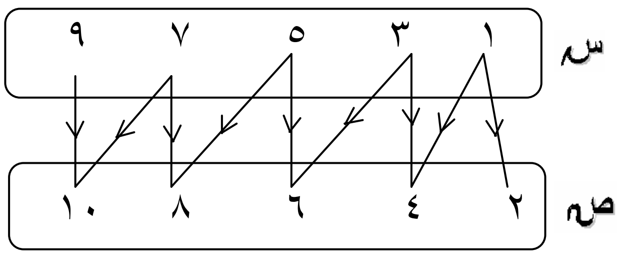
(ب)



(ج)



(د)



(هـ)

(٣) إذا كانت س = { أ ، ب ، جـ } ، ص = { ١ ، ٢ }
أرسم بمخططات سهمية ٥ تطبيقات مختلفة من س إلى ص .

(٤) لنفترض أن ق : ح ⟵ ح معرف بالعبارة :
ق (س) = س^{٢} – ٤س + ١ ، جد ق ($^{-}$٣) ، ق (٤)

(٥) لنفترض أن د : ح ⟵ ح معرف بالعبارة :

د (س) = { س^{٢} إذا كانت س ≤ ٢
س + ٢ إذا كان س > ٢

جد : د(٥) ، د(٠) ، د($^{-}$١)

(٦) التطبيق هـ : م ⟵ م معرف بالجدول التالي :
حيث م = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

م	١	٢	٣	٤
م	٢	٣	١	٢

(أ) ارسم بياناً شبكياً لهذا التطبيق .
(ب) اكتب مدى التطبيق هـ .
(جـ) ما نوع هذا التطبيق ؟
(د) أكمل رسم المخطط السهمي التالي للتطبيق هـ :

× × × ×
١ ٢ ٣ ٤

(٧) إذا كان د : ح ⟵ ح معرف بالقاعدة التالية :
د (س) = ٣س – ٢
(أ) جد قاعدة التطبيق العكسي له .
(ب) جد د(٢) ، د$^{-١}$(٢) ، د$^{-١}$(٠)

الوحدة الثالثة

الأساس والقوة واللوغريتم

الدرس الأول : الأساس والقوة :

(١) حلل الأعداد الآتية إلى عواملها الأولية :

٨ ، ٣٦ ، ٢٥ ، ٦٤ ، ٨١ ، ١٢٥

(٢) بتحليل الأعداد ٣٢ ، ٢٧ ، ٦٢٥ نتحصل على الآتي :

٣٢ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢

٢٧ = ٣ × ٣ × ٣

٦٢٥ = ٥ × ٥ × ٥ × ٥

١- كم مرة تكرر العدد ٢ ؟

٢- كم مرة تكرر العدد ٣ ؟

٣- كم مرة تكرر العدد ٥ ؟

- بدلاً من الطريقة المطولة لكتابة هذه الأعداد نكتبها هكذا :

٣٢ = $٢^{٥}$ (العدد ٥ يعني عدد مرات تكرار العدد ٢ ، أي عـــدد المرات التي ضرب فيها العدد ٢ في نفسه)

وكذلك ٢٧ = $٣^{٣}$

٦٢٥ = $٥^{٤}$

- ماذا تعني $٣^{٢}$ ، $٧^{٣}$ ، $٢^{٦}$ ، $٢^{١٥}$ ، $٣^{٧}$ ، $٥^{٨}$ ، $١١^{٩}$ ؟

تسمى $٣^{٢}$ القوة الثانية للعدد ٣ ويسمي العدد ٣ الأساس كما يسمي العدد ٢ الأس . وتقرأ ٣ أس ٢ أو ٣ تربيع أو القوة الثانية للعدد ٣ .

وتسمي $٧^{٣}$ القوة الثالثة للعدد ٧ ويسمي العدد ٧ الأساس كما يسمي العدد ٣ الأس . وتقرأ ٧ أس ٣ أو ٧ تكعيب أو القوة الثالثة للعدد ٧.

وكذلك نسمي $٢^{٦}$ القوة السادسة للعدد ٢ ويسمى العدد ٢ الأساس كما يسمى العدد ٦ الأس . وتقرأ ٢ أس ٦ أو القوة السادسة للعدد ٢ .

وأيضاً نسمي $٣^{٧}$ القوة السابعة للعدد ٣ ويسمى العدد ٣ الأساس كما يسمى العدد ٧ الأس . وتقرأ ٣ أس ٧ أو القوة السابعة للعدد ٣ وهكذا .

وعليه فإن $أ^{ن}$ تسمى القوة النونية للعدد أ ويسمى أ الأساس ويسمى ن الأس وتقرأ أ أس ن أو القوة النونية للعدد أ .

الدرس الثاني : ضرب القوتين ذات الأساس الموحد :

(أ) (١) اكتب $٢^{٥}$ بطريقة التحليل (الطريقة المطولة) .

(٢) اكتب $٢^{٧}$ بطريقة التحليل .

(٣) اكتب $٢^{٥} \times ٢^{٧}$ بطريقة التحليل .

(٤) ضع $٢^{٥} \times ٢^{٧}$ على صورة قوة واحدة للعدد ٢ ماذا تلاحظ ؟

(ب) كرر هذه العملية مع $٣^{٤}$ ، $٣^{٥}$

$٣^{٤} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣$

$٣^{٥} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣$

$٣^{٤} \times ٣^{٥} = (٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣) \times (٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣) = ٣^{٩}$

- ما العلاقة بين ٤ ، ٥ ، ٩

(ج) أكمل : $أ^{٣} \times أ^{٧} =$ ....

(د) إذا كان أ $\in$ ح ، م ، ن $\in$ ط

نجد أن : $أ^{م} \times أ^{ن} =$

$$\underbrace{(أ \times أ \times أ \times \cdots \times أ)}_{\text{م من العوامل}} \times \underbrace{(أ \times أ \times أ \times \cdots \times أ)}_{\text{ن من العوامل}} = أ^{(م + ن)}$$

قاعدة :

> **إذا كان أ عدداً حقيقياً ، وكان م ، ن عددين صحيحين موجبين فإن : $أ^{ن} \times أ^{م} = أ^{(ن + م)}$**
>
> **أي عندما نضرب أعداداً ذات أساس موحد نجمع القوى .**

مثال (١) :

بسط ما يأتي :

(أ) $٧^{٥} \times ٧^{٦}$ (ب) $٥^{٧} \times ٥$

(ج) $٢س^{٥} \times س$ (د) $(٢أ ب^{٣}) (^{-}٣أ^{٦}ب^{٨})$

الحل :

(أ) $٧^{٥} \times ٧^{٦} = ٧^{(٥+٦)} = ٧^{١١}$

(ب) $٥^{٧} \times ٥^{١} = ٥^{(٧+١)} = ٥^{٨}$

(ج) $٢س^{٥} \times س = ٢س^{(٥+١)} = ٢س^{٦}$

(د) $(٢أب^{٣}) (^{-}٣أ^{٦}ب^{٨}) = (٢ \times ^{-}٣) (أ^{١}ب^{٣}) (أ^{٦}ب^{٨}) = ^{-}٦أ^{٧}ب^{١١}$

تمرين (٣ – ١)

بسط ما يأتي :

(١) م^{٣} × م^{١١} (٢) ٢^{٧} × ٢^{٥} (٣) ٢^{أ} × ٢^{٤أ}

(٤) ٣س × ٢س^{٢} (٥) ٢^{٢}س × ٢^{٣}س^{٢} (٦) ٢٧أ × ٣^{٤}أ^{٣}

(٧) ٢^{٦} × ٢^{٢} × ٢^{٣} (٨) $^{-}$٣س (٤س^{٣}ص^{٢}) (ص^{٤}س^{٢})

(٩) ($^{-}$أ)^{٢} (أ^{٣}ب) ($^{-}$ب)^{٣}

(١٠) ($^{-}$٧أ^{٢}) (٥ب) ($^{-}$٢ب) + (٤أب)($^{-}$٢أب)

الدرس الثالث : رفع القوة لقوة أخرى :

نعلم أن : ٢^{٥} = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢

إذن (١) (٢^{٣})^{٤} = ٢^{٣} × ٢^{٣} × ٢^{٣} × ٢^{٣} = ٢^{١٢}

(٢) (٧^{٢})^{٣} = ٧^{٢} × ٧^{٢} × ٧^{٢} = ٧^{٦}

(٣) (١١^{٣})^{٣} = ١١^{٣} × ١١^{٣} × ١١^{٣} = ١١^{٩}

- ما العلاقة بين ٣ ، ٤ ، ١٢ في (١) ؟
- ما العلاقة بين ٢ ، ٣ ، ٦ في (٢) ؟
- ما العلاقة بين ٣ ، ٣ ، ٩ في (٣) ؟

أكمل :

(ب^{٥})^{٤} = ...

(س^{١٢})^{٥} = ...

(أ^{م})^{٣} = ...

$(أ^{٤})^{ن} =$ ....

$(أ^{م})^{ن} = أ^{م\times ن} = أ^{م ن}$

قاعدة :

إذا كان أ عدداً حقيقياً م ، ن عددين صحيحين موجبين فــإن $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$. أي : عندما نرفع قوة العدد إلى قوة أخــرى نضرب القوتين .

مثال (١) :

ضع ما يأتي في أبسط صورة :

(١) $(س^{٤})^{٣}$ (٢) $(هـ^{٣})^{١٢}$ (٣) $((١١^{٥})^{٢})^{١٠}$

الحل :

(١) $(س^{٤})^{٣} = س^{١٢}$

(٢) $(هـ^{٣})^{١٢} = هـ^{٣٦}$

(٣) $((١١^{٥})^{٢})^{١٠} = (١١^{١٠})^{١٠} = ١١^{١٠٠}$

الدرس الرابع : قوة حاصل الضرب بالأس نفسه

الحدان $٢ب^{٣}$ ، $(٢ب)^{٣}$ مختلفان ولا يمكن أن يتساويا إلا إذا كانت ب = ٠ .

$٢ب^{٣} = ٢ \times ب \times ب \times ب$

لكن $(٢ب)^{٣} = ٢ب \times ٢ب \times ٢ب = ٢^{٣} ب^{٣} = ٨ب^{٣}$

كذلك : $٣٠^{٢}$: = ٣٠ × ٣٠ = (٢ × ٣ × ٥) (٢ × ٣ × ٥) = $(٢ × ٣ × ٥)^{٢}$

وايضًا $٣٠^{٢}$ = ٣٠ × ٣٠ = (٢ × ٣ × ٥) (٢ × ٣ × ٥)

= (٢×٢×٣×٣×٥×٥) = $٢^{٢}×٣^{٢}×٥^{٢}$ (الخاصية الإبدالية)

∴ $(أب)^{٢}$ = أ × ب × أ × ب = أ × أ × ب × ب = $أ^{٢}ب^{٢}$

∴ $(أب)^{ن} = \underbrace{(أ × أ × أ × \cdots × أ)}_{ن \text{ من العوامل}} \underbrace{(ب × ب × ب × \cdots × ب)}_{ن \text{ من العوامل}}$

= $أ^{ن}ب^{ن}$

لكل أ ، ب ∈ ص ، ن عدد صحيح موجب فإن :
(١) $(أب)^{ن} = أ^{ن}ب^{ن}$
أو (٢) $أ^{ن}ب^{ن} = (أب)^{ن}$

مثال (١) :

بسط ما يأتي :

(أ) $٧^{٢} × ٣^{٢}$

(ب) $٥^{٤} × ٣^{٤} × ٢^{٤}$

(ج) $س^{٥} × ص^{٥} × ٢^{٥}$

الحل :

(أ) $٧^{٢} × ٣^{٢} = (٧ × ٣)^{٢} = ٢١^{٢}$

(ب) $٥^{٤} × ٣^{٤} × ٢^{٤} = (٥ × ٣ × ٢)^{٤} = ٣٠^{٤}$

(ج) $س^{٥} × ص^{٥} × ٢^{٥} = (٢س ص)^{٥}$

مثال (٢) :

جد حاصل كل مما يأتي :

(أ) $(^-٣أ^{٧}ب^{٤})^{٣}$

(ب) أب $(٢أب^{٢}\ جـ^{٢})^{٤}$

الحل :

(أ) $(^-٣أ^{٧}ب^{٤})^{٣} = (^-٣)^{٣}\ (أ^{٧})^{٣}\ (ب^{٤})^{٣} = {}^-٢٧\ أ^{٢١}\ ب^{١٢}$

(ب) أب $(٢أب^{٢}\ جـ^{٢})^{٤} =$ أب $(٢^{٤}أ^{٤}\ ب^{٨}\ جـ^{٨}) = ١٦أ^{٥}\ ب^{٩}\ جـ^{٨}$

تمرين (٣–٢)

جد حاصل كل ما يأتي :

(١) $(٣ك\ ل\ م)^{٢}$ (٢) $(^-٥س^{٤})^{٢}$ (٣) $(٧ك^{٤}ن^{٣})^{٢}$

(٤) $(د\ م\ ن)^{٣}$ (٥) $(^-٧س) \times (٣س^{٢}ص)^{٢}$

(٦) $(٢ب^{٢}\ د)^{٤}\ (^-٣د\ ب)^{٢}$ (٧) $(٣س\ ص^{٢}\ ع)\ (^-٣س^{٢}\ ص\ ع^{٣})^{٢}$

الدرس الخامس : قسمة القوتين ذات الأساس الموحد :

أولاً : إذا كان م > ن

(١) $\dfrac{٢^{٨}}{٢^{٥}} = \dfrac{٢^{٥} \times ٢^{٣}}{٢^{٥}} = ٢^{٣}$

أو بصورة عامة :

$\dfrac{س^{٥}}{س^{٣}} = \dfrac{س^{٣} \times س^{٢}}{س^{٣}} = س^{٢}$ (بالاختصار)

أو $= \left(\frac{1}{س^{3}} \times س^{3}\right) \times س^{2}$ (التجميع)

$= 1 \times س^{2}$ (العنصر المحايد)

$= س^{2}$

$\therefore \quad \frac{س^{5}}{س^{3}} = س^{2}$

ولكن نلاحظ أن :

$س^{2} = س^{(5-3)}$

$\therefore \quad \frac{س^{5}}{س^{3}} = س^{(5-3)} = س^{2}$

قاعدة :

> **لكل أ $\in$ ص ، م ، ن عددان صحيحان موجبان نجد أن**
>
> $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن} \quad (أ \neq 0)$

أمثلة :

١- $\frac{أ^{7}}{أ^{5}} = أ^{(7-5)} = أ^{2}$

٢- $\frac{أ^{9}}{أ^{5}} = أ^{(9-5)} = أ^{4}$

٣- $\frac{2^{15}}{2^{8}} = 2^{(15-8)} = 2^{7}$

٤- $\frac{٢^{١٤}}{٢^{١٣}} = ٢^{(١٤-١٣)} = ٢^{١} = ٢$

ثانياً : إذا كان م < ن

نعلم أن :

$$\frac{٣^{٣}}{٣^{٥}} = \frac{٣ \times ٣ \times ٣}{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣} = \frac{١}{٣^{٢}}$$

أو :

$$\frac{٣^{٣}}{٣^{٥}} = \frac{٣^{٣}}{٣^{٣}} \times \frac{١}{٣^{٢}} = \frac{١}{٣^{٢}} \qquad (١)$$

لكن إذا استخدمنا القاعدة السابقة نجد أن :

$$\frac{٣^{٣}}{٣^{٥}} = ٣^{٣-٥} = ٣^{-٢}$$

∴ من (١) ، (٢) يكون :

$$\frac{١}{٣^{٢}} = ٣^{-٢}$$

أيضاً :

$$\frac{س^{٧}}{س^{١٠}} = \frac{س^{٧}}{س^{٧}} \times \frac{١}{س^{٣}} = \frac{١}{س^{٣}}$$

لكن :

$$\frac{س^{٧}}{س^{١٠}} = س^{٧-١٠} = س^{-٣}$$

∴ $\frac{١}{س^{٣}} = س^{-٣}$

قاعدة :

لكل أ ∈ ح ، ن ∈ ص نجد أن : $\text{أ}^{-\text{ن}} = \dfrac{١}{\text{أ}^{\text{ن}}}$ $(\text{أ} \neq ٠)$

١- $٥^{-٢} = \dfrac{١}{٥^{٢}}$

٢- $\dfrac{١}{٧^{١٢}} = ٧^{-١٢}$

٣- $\dfrac{١}{٣^{-٥}} = ٣^{-(-٥)} = ٣^{٥}$

٤- $\dfrac{١}{١١^{-٨}} = ١١^{٨}$

ثالثاً : إذا كان م = ن

$$\dfrac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٣}} = ١$$

$$\dfrac{\text{س}^{١٥}}{\text{س}^{١٥}} = ١$$

$$\dfrac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ}^{\text{م}}} = ١ \qquad (١)$$

نعلم أن :

$$\dfrac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ}^{\text{م}}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{م}} = \text{أ}^{٠} \qquad (٢)$$

∴ من (١) ، (٢) $\text{أ}^{٠} = ١$

لكل أ ∋ ح نجد أن : $أ^{٠} = ١$

أمثلة :

$٢١^{٠} = ١$

$١٥٠^{٠} = ١$

$\bar{٥}^{٠} = ١$

$$\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٠} = ١$$

$$\left(\frac{\bar{٦}}{٧}\right)^{٠} = ١$$

تمرين (٣–٣)

(١) بسط ما يأتي واكتب الإجابة بأس موجب ما أمكن :

(أ) $هـ^{٠}$ (ب) $ص^{-٣}$ (ج) $م^{-ن}$

(هـ) $م^{-٥} ن^{٠}$ (و) $\frac{٥ن^{٥}}{ن^{٨}}$ (ز) $\frac{أ^{-٤}}{ب^{-٣}}$

(٢) جد قيمة ما يلي :

(أ) $\frac{س^{٨}}{س^{٥}}$ (ب) $\frac{ص^{٩}}{ص^{٢}}$ (ج) $\frac{٣ن^{٦}}{ن^{٥}}$

(د) $\frac{م^{٢}}{م^{-٤}}$ (هـ) $\frac{١}{٢^{-٣}}$ (ز) $\frac{ك^{-٢}}{ك^{٤}}$

الدرس السادس : قسمة الأعداد ذات القوة الموحدة :

لنأخذ العملية : $\frac{س^{٣}}{ص^{٣}}$ ، ص $\neq$ ٠ نجد أن :

$$\frac{س^{٣}}{ص^{٣}} = \frac{س \times س \times س}{ص \times ص \times ص} = \frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{٣}$$

ومنه يكون :

$$أ^{م} \div ب^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} \quad ، \quad ب \neq ٠$$

أمثلة :

(١) $\frac{٤^{٢}}{٥^{٢}} = \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢}$

(٢) $\frac{ل^{٧}}{م^{٧}} = \left(\frac{ل}{م}\right)^{٧}$

تمرين (٣-٤)

(١) أختصر :

(أ) $\frac{٢^{٣}}{٣^{٣}}$ (ب) $\frac{٥^{١٦}}{٧^{١٦}}$ (ج) $٦^{١٣} \div ٢^{١٣}$

(د) $\frac{س^{٩}}{ص^{٩}}$ (هـ) $\frac{ع^{١٥}}{هـ^{١٥}}$

(٢) اختصر :

(أ) $\frac{أ^{٣}ب^{٣}}{هـ^{٣}}$ (ب) $\frac{أ^{٥}م^{٩}}{م^{٤}}$ (ج) $\frac{٢س^{٣}}{٢^{٣}س^{٣}}$ (د) $\frac{جـ^{٢} ب^{٣} د^{٢}}{جـ^{٤} ب^{٣} د^{٤}}$

الدرس السابع : أمثلة إضافية :

مثال (١) :

إختصر :

$$\frac{\text{س}^{-٢}\ \text{ص}^{-٣}}{\text{س}^{٤}\ \text{ص}^{-٢}} \qquad (\text{س} \neq ٠ \text{ ، ص} \neq ٠)$$

الحل :

$$\frac{\text{س}^{-٢}\ \text{ص}^{-٣}}{\text{س}^{٤}\ \text{ص}^{-٢}} = \frac{\text{س}^{-٢}}{\text{س}^{٤}} \times \frac{\text{ص}^{-٣}}{\text{ص}^{-٢}}$$

$$= \text{س}^{-٢-(٤)}\ \text{ص}^{-٣-(-٢)}$$

$$= \text{س}^{-٦}\ \text{ص}^{-١}$$

$$= \frac{١}{\text{س}^{٦}} \times \frac{١}{\text{ص}} = \frac{١}{\text{س}^{٦}\text{ص}}$$

مثال (٢) :

إختصر :

(أ) $\dfrac{(١٠)^{٣} \times (١٠)^{-٤}}{١٠^{-٥}}$

(ب) $٧^{-٥} \times ٧^{-٣}$

(ج) $(٢^{-١})^{-٢}$

الحل :

(أ) $\dfrac{١٠^{٣} \times ١٠^{-٤}}{١٠^{-٥}} = ١٠^{٣ + (-٤) - (-٥)} = ١٠^{٤}$

(ب) $٧^{-٥} \times ٧^{-٣} = ٧^{(-٥)+(-٣)} = ٧^{-٨}$

أو $٧^{-٥} \times ٧^{-٣} = \frac{١}{٧^{٥}} \times \frac{١}{٧^{٣}} = \frac{١}{٧^{٨}}$

(ج) $(٢^{-١})^{-٢} = ٢^{(-١)\times(-٢)} = ٢^{٢} = ٤$

تمرين (٣–٥)

اختصر ما يأتي :

(١) $\frac{١٠^{٤} \times ١٠^{٣}}{١٠^{٢} \times ١٠^{٥}}$ (٢) $\frac{٣٦\text{س}^{٢}\text{ص}^{٤}}{٨\text{س}^{٥}\text{ص}}$

(٣) $\frac{\text{جـ}^{٤}\text{ب}^{٣}}{\text{جـ}^{٧}\text{ب}}$ (٤) $\frac{١٠^{٧} \times ١٠^{٣}}{١٠^{٤}}$

(٥) $\frac{٢\text{س}^{٢}\text{ص}^{-٢}}{٤\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢}}$ (٦) $\frac{٢^{-٣}\text{س}^{-٢}\text{ص}^{٤}}{٢^{-٢}\text{س}^{٢}\text{ص}^{-١}}$

(٧) $\text{س}^{٧} \div \text{س}^{٥}$ (٨) $\text{س}^{-٣}\text{س}^{-٧}$

(٩) $\text{س}^{٢}\text{س}^{٠}$ (١٠) $(\text{س}^{٠})^{٥}$

الدرس الثامن : اللوغرثيم :

لوغرثيم العدد لأي أساس هو عدد مرات تكرار هذا الأساس عن طريق الضرب لنحصل على العدد .

وبمعنى آخر : لوغرثيم العدد لأساس معين هو القوة (الأس) التي يجب أن يرفع لها الأساس لنحصل على ذلك العدد .

ومن التعريف يتضح أننا لا نستطيع أن نتحدث عن اللوغريثم دون تعيين الأساس ونرمز للوغرثيم بالرمز لو

أمثلة :

(١) ٦٤ = ٢^{٦} تعني أن لو$_{٢}$ ٦٤ = ٦

وتقرأ لوغريثم ٦٤ للأساس ٢ يساوي ٦

(٢) ٦٤ = ٨^{٢} تعني أن لو$_{٨}$ ٦٤ = ٢

وتقرأ لوغريثم ٦٤ للأساس ٨ يساوي ٢

(٣) ١٠٠٠ = ١٠^{٣} تعني أن لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = ٣

وتقرأ لوغريثم ١٠٠٠ للأساس ١٠ يساوي ٣

أ = ن^{م} تعني أن لو$_{ن}$ أ = م

مما سبق نلاحظ أن :

العدد أ في القاعدة السابقة يعرف **بمقابل اللوغريثم** م للأساس ن

مثلاً :

- لو$_{٢}$ ٦٤ = ٦ ، ∴ مقابل ٦ للأساس ٢ = ٢^{٦} = ٦٤
- لو$_{٩}$ ٨١ = ٢ ، ∴ مقابل ٢ للأساس ٩ = ٩^{٢} = ٨١
- لو$_{٣}$ ٨١ = ٤ ، ∴ مقابل ٤ للأساس ٣ = ٣^{٤} = ٨١
- لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = ٣ ، ∴ مقابل ٣ للأساس ١٠ = ١٠^{٣} = ١٠٠٠

❖ ما اللوغريثم إذا كان المقابل للأساس ١٠ هو ١٠ ؟

❖ نلاحظ أنه إذا كان المقابل هو ١٠ والأساس ١٠

فإن ١٠ = ١٠^{١} ، أي أن لو$_{١٠}$ ١٠ = ١

وبالمثل ٢ = ٢^{١} ، أي لو$_{٢}$ ٢ = ١

لو$_{٥}$ ٥ = ١ ، أي لو$_{أ}$ أ = ١

تمرين (٣–٦)

١) أكمل ما يأتي :

(١) لو$_{٢}$ ٢ = ١ ، ∴ مقابل ١ للأساس ٢ هو ....

(٢) لو$_{٢}$ ٤ = ٢ ، ∴ مقابل .... للأساس ٢ هو ....

(٣) لو$_{٢}$ ... = ٦ ، ∴ مقابل ٦ للأساس ٢ هو ....

(٤) لو$_{١٠}$ ١٠٠٠٠= ، ∴ مقابل ... للأساس ١٠ هو ....

(٥) لو$_{٣}$ ٢٧ = ... ، ∴ مقابل .... للأساس ٣هو ....

٢) إذا كان مقابل ٢ هو ١٠٠ فما الأساس ؟

٣) ما اللوغرثيم إذا كان المقابل للأساس ٥ هو ٥ ؟

٤) إذا كان لو$_{١٠}$ ص = س فما مقابل س للأساس ١٠ ؟

٥) حول العلاقة الأسية التالية إلى لوغرثيمية :

(أ) ٣٢ = ٢^{٥} (ب) ٧^{٣} = ٣٤٣ (جـ) ٥^{٣} = ١٢٥

٦) حول العلاقة اللوغرثيمية التالية إلى علاقة أسية :

(أ) لو$_{٣}$ ٢٤٣ = ٥ (ب) ٢ = لو$_{٦}$ ٣٦ (جـ) لو$_{٢}$ ١٢٨ =٧

الدرس التاسع : اللوغرثيمات المعتادة (اللوغرثيم العشري) :

اللوغرثيم الذي أساسه ١٠ هو أكثر اللوغرثيمات استخداماً في المسائل العددية . وعادة نكتب اللوغريثمات التي أساسها ١٠ بدون كتابة الأساس أي أن لو أ تعني لو$_{١٠}$ أ

- تأمل الأتي :

لو ١٠٠٠٠ = ٤ لأن ١٠٠٠٠ = $١٠^{٤}$

لو ١٠٠٠ = ٣ لأن ١٠٠٠ = $١٠^{٣}$

لو ١٠٠ = ٢ لأن ١٠٠ = $١٠^{٢}$

لو ١٠ = ١ لأن ١٠ = $١٠^{١}$

لو ١ = ٠ لأن ١ = $١٠^{٠}$

لو ٠,١ = $^{-}١$ لأن ٠,١ = $\frac{١}{١٠^{١}}$ = $١٠^{-١}$

لو ٠,٠١ = $^{-}٢$ لأن ٠,٠١ = $\frac{١}{١٠^{٢}}$ = $١٠^{-٢}$

لو ٠,٠٠١ = $^{-}٣$ لأن ٠,٠٠١ = $\frac{١}{١٠^{٣}}$ = $١٠^{-٣}$

لو ٠,٠٠٠١ = $^{-}٤$ لأن ٠,٠٠٠١ = $\frac{١}{١٠^{٤}}$ = $١٠^{-٤}$

- ماذا تلاحظ في لوغريثمات الأعداد التي هي أكبر من ١ ؟
- ماذا تلاحظ في لوغريثمات الأعداد التي هي أقل من ١ ؟

عرفنا مما سبق اللوغريثمات المعتادة للأعداد مثل ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، أو مثل ٠,١ ، ٠,٠١ ، ٠,٠٠١ ، ... ، ولكن كيف نجد لوغريثمات أعداد مثل ٣ ، ٣٧ ، ٣٧٥ ، ٣٧٥٦ ، ...

فالعدد ٣ يقع بين العددين ١ ، ١٠ إذن يكون لوغريثمه أكبر من الصفر وأقل من ١ أي كسراً (عشرياً) موجباً يقل عن ١

وبالمثل العدد ٣٧ يكبر العدد ١٠ ويقل عن ١٠٠ فإن لو ٣٧ يكبر لو ١٠ ويقل عن لو ١٠٠

أي لو ٣٧ = ١ + كسراً عشرياً موجباً

وايضاً لو ٣٧٥ أكبر من ٢ وأقل من ٣

أي لو ٣٧٥ = ٢ + كسراً عشرياً موجباً

لو ٣٧٥٦ = ٣ + كسراً عشرياً موجباً

نلاحظ مما سبق أن لوغريثم العدد يتكون من جزئين ، أحدهما العدد الصحيح والذي يمكن تعيينه بسهولة ويسمى **العدد البياني** والآخر الكسر العشري ويسمى **الجزء العشري** ولتعيينه صُمّمت جداول خاصة لذلك .

- في الإعداد السابقة هل لاحظت علاقة بين عدد الارقام التي يتكون منها العدد ، والعدد البياني ؟

لاحظ ايضاً أن لو ١ = ٠

لو ٠,١ = $\bar{١}$

لو ٠,٠١ = $\bar{٢}$

لو ٠,٠٠١ = ٣̅

لو ٠,٠٠٠١ = ٤̅ ... كما مر بنا

فكيف نجد لوغريثمات أعداد مثل ٠,٣٤ ، ٠,٠٣٤ ،٠,٠٠٣٤ ، ... ألخ

فالعدد ٠,٣٤ أقل من ١ وأكبر من ٠,١

∴ لو ٠,٣٤ أقل من ٠ وأكبر من ١̅

أي لو ٠,٣٤ = ١̅ + جزء عشري

فالعدد ٠,٠٣٤ أقل من ٠,١ وأكبر من ٠,٠١

∴ لو ٠,٠٣٤ أقل من ١̅ وأكبر من ٢̅

أي لو ٠,٠٣٤ = ٢̅ + الجزء العشري

لو ٠,٠٠٣٤ أقل من ٢̅ وأكبر من ٣̅

أي لو ٠,٠٠٣٤ = ٣̅ + الجزء العشري

وبالمثل : لو ٠,٠٠٠٣٤ = ٤̅ + الجزء العشري

الاعداد الصحيحة ٠ ، ١̅ ، ٢̅ ، ٣̅ ، ٤̅ ، ٠٠٠ ، في لوغريثمات هذه الأعداد تسمى الأعداد البيانية أيضاً .

لاحظ أن الجزء العشري في لوغريثم أي عدد دائماً موجب يكون العدد البياني إما موجباً أو سالباً حسب القاعدتين الآتيتين :

(١) العدد البياني في لوغريثم أي عدد أكبر من الواحد الصحيح يكون موجب ويساوي العدد الدال على عدد أرقام جزئه الصحيح مطروحاً منه واحد

فالعدد البياني من لو ٦,٣٥١ يساوي صفراً .

والعدد البياني من لو ٤٥٣٦ يساوي ٣ .

والعدد البياني من لو ٥٧,٦١ يساوي ١ .

(٢) العدد البياني في لوغريثم أي عدد أقل من الواحد الصحيح يكون سالباً ويساوي العدد الدال على عدد الأصفار التي على يمين الفاصلة العشرية مباشرة مضافاً إليه واحد عندما يكون العدد البياني سالباً تكتب العلامة (–) فوق العدد البياني مثل :
$\overline{٢}$ ، $\overline{٣}$ ، ...

فالعدد البياني من لوغريثم ٠,٠٥٢٧١ = $\overline{٢}$

والعدد البياني من لوغريثم ٠,٢٧٤٩ = $\overline{١}$

فالعدد البياني من لوغريثم ٠,٠٠٠٢١٣ = $\overline{٤}$

وهكذا

ويمكن استخراج لوغريثم العدد باستخدام الآلة الحاسبة أيضاً والتي تعطي الجزء العشري والعدد البياني مباشرة .

مثال (١) :

إذا كان لو ٦,٣٧ = ٠,٨٠٤١

جد :

(أ) لو ٦٣,٧	(ب) لو ٦٣٧٠
(ج) لو ٠,٠٦٣٧	(د) لو ٠,٠٠٦٣٧

الحل :

(أ) لو ٦٣,٧ = ١,٨٠٤١

(ب) لو ٦٣٧٠ = ٣,٨٠٤١

(ج) لو ٠,٠٦٣٧ = $\overline{٢}$,٨٠٤١

(د) لو ٠,٠٠٦٣٧ = $\overline{٣}$,٨٠٤١

تمرين (٣-٧)

١) إذا كان لو ٥,٦٣٦ = ٠,٧٥١

جد :

(أ) لو ٥٦٣٦ (ب) لو ٥٦,٣٦ (ج) لو ٠,٥٦٣٦

(د) لو ٥٦٣٦٠ (هـ) لو ٠,٠٥٦٣٦

(٢) إذا كان لو ٧,١٢ = ٠,٨٥٢٥

فإن : (أ) لو ..... = ٢,٨٥٢٥ (ب) لو ..... = $\overline{١}$,٨٥٢٥

(ج) لو ٠,٠٠٧١٢ = ...

الوحدة الرابعة

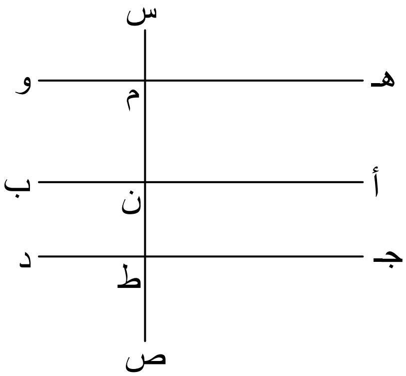
القواطع والمتوسطات

الدرس الأول : القواطع : نظرية (١) (القطع المتساوية)

تمهيد :

(أ) في الشكل (٤–١) المقابل :

- سَّم أربعة مستقيمات .
- سَّم قطعتين مستقيمتين .
- المستقيم س ص يسمى **قاطعاً** للمستقيمات الثلاثة الأخرى .

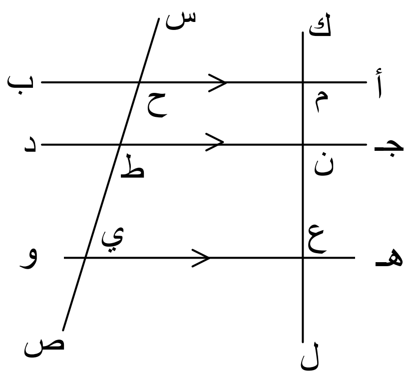


الشكل (٤–١)

- القطعة المستقيمة $\overline{\text{م ن}}$ تسمى **قطعة** ، وكذلك $\overline{\text{ن ط}}$.
- تحقق إذا كانت : $\overline{\text{م ن}}$ = $\overline{\text{ن ط}}$ أم لا .

(ب) في الشكل (٤–٢) :

- أب ، جـد . هـو مستقيمات متوازية .
- سَّم القاطعين .
- هل القطعتان $\overline{\text{ح ط}}$ ، $\overline{\text{ط ي}}$ متساويتان ؟ وكذلك $\overline{\text{م ن}}$ ، $\overline{\text{ن ع}}$ ؟



الشكل (٤–٢)

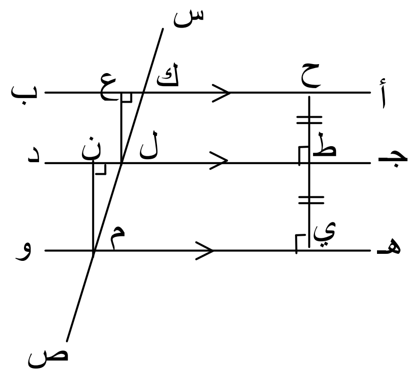
(جـ) الشكل (٤–٣) المقابل :

- ما نوع الشكل ط ل ع ح ؟
- لماذا ؟
- ∴ $\overline{\text{ح ط}}$ = $\overline{\text{ع ل}}$

وكذلك نجد أن :

- $\overline{\text{ط ي}}$ = $\overline{\text{ن م}}$
- $\overline{\text{ح ط}}$ = $\overline{\text{ط ي}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{ع ل}}$ = $\overline{\text{ن م}}$



الشكل (٤–٣)

- هل يتطابق المثلثان ل ع ك ، م ن ل ؟ لماذا ؟

∴ يمكن إثبات أن $\overline{\text{ك ل}}$ = $\overline{\text{ل م}}$.

نخلص من هذا التمهيد للنظرية التالية :

نظرية (١) :

> **(القطع المتساوية) :**
>
> **إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية (ثلاثة أو أكثر) ، وكانت القطع المحصورة بين المستقيمات المتوازية متساوية ، فإن القطع المحصورة بين هذه المستقيمات المتوازية لأي قاطع آخر تكون متساوية .**

المعطيات :

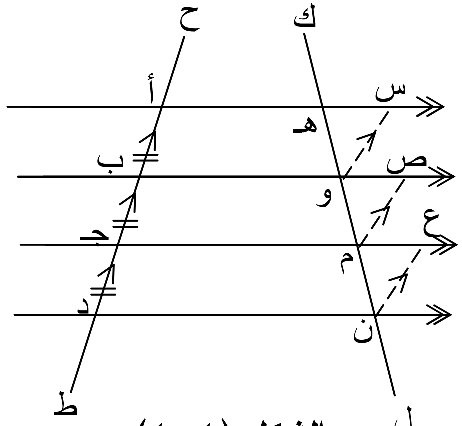
أ هـ // ب و // جـ م // د ن

$\overline{أب} = \overline{ب جـ} = \overline{جـ د}$

ك ل قاطع آخر

المطلوب إثباته :

$\overline{هـ و} = \overline{و م} = \overline{م ن}$



الشكل (٤-٤)

العمل :

من النقاط و ، م ، ن أرسم مستقيمات موازية للمستقيم ح ط لتلاقي إمتدادات $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{ب و}$ ، $\overline{جـ م}$ في س ، ص ، ع على الترتيب .

البرهان :

في الشكل (٤-٤)

$\overline{س أ}$ // $\overline{و ب}$ (معطى)

$\overline{و س}$ // $\overline{ب أ}$ (عملاً)

∴ الشكل و ب أ س متوازي أضلاع (كل ضلعين متقابلين متوازيين) .

∴ $\overline{س و} = \overline{أ ب}$ (ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع) .

بالطريقة نفسها يمكن إثبات أنّ :

$\overline{م ص} = \overline{جـ ب}$

$\overline{أ ب} = \overline{ب جـ}$ (معطى)

$\overline{س و} = \overline{ص م}$

في Δ س و هـ ، Δ ص م و

$\overline{\text{س و}} = \overline{\text{ص م}}$ (بالبرهان)

∡ س هـ و = ∡ ص و م (بالتناظر س هـ // ص و)

∡ س و هـ = ∡ ص م و (بالتناظر س و // ص م)

∴ المثلثان متطابقان (ض ، ز ، ز)

∴ $\overline{\text{هـ و}} = \overline{\text{و م}}$

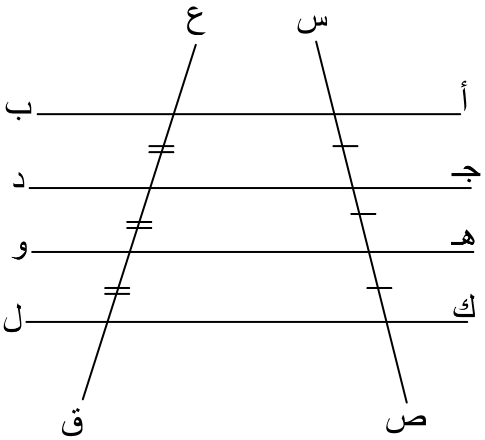
بالطريقة نفسها يمكن إثبات أن

$\overline{\text{و م}} = \overline{\text{م ن}}$

∴ $\overline{\text{هـ و}} = \overline{\text{و م}} = \overline{\text{م ن}}$

نتيجة :

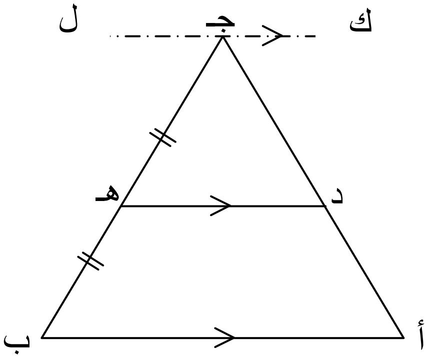
إذا قطع قاطعان عدة مستقيمات ، وكانت القطع المحصورة بين القاطع الأول وهذه المستقيمات متساوية وكذلك القطع المحصورة بين القاطع الثاني وهذه المستقيمات متساوية تكون المستقيمات متوازية .



الدرس الثاني : نظرية (٢) :

المستقيم المرسوم من منتصف أحد أضلاع المثلث موازياً ضلعاً آخر فيه ينصف الضلع الثالث .

المعطيات :



Δ أ ب جـ

ب هـ = هـ جـ ، د هـ // أ ب

المطلوب إثباته :

أ د = د جـ

العمل :

أرسم ك ل // أ ب ويمر بالنقطة جـ

البرهان :

أ ب // د هـ // ك ل

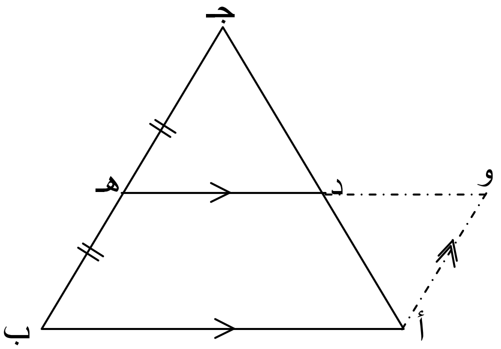
ب هـ = هـ جـ (معطى)

∴ أ ب ، د هـ ، ك ل قطعت قطعاً متساوية على القـــاطع جـ ب

فإنها تقطع قطعاً متساوية على القاطع أ جـ .

∴ أ د = د جـ

برهان آخر :



المعطيات :

Δ أ ب جـ

د هـ // أ ب ، ب هـ = هـ جـ

المطلوب إثباته :

أ د = د جـ

العمل :

أرسم أ و // ب هـ ويلاقي امتداد هـــ د في و

البرهان :

أ ب // د هـ (معطى) ∴ أ ب // و هـــ

أ و // ب هـ (عملاً)

∴ أ ب هـ و (متوازي أضلاع كل ضلعين متقابلين متوازيان)

∴ أ و = ب هـ (متقابلان في متوازي أضلاع)

∵ ب هـ = هـ جـ (معطى)

∴ أ و = هـ جـ

في △ أ د و ، △ جـ د هـ

أ و = جـ هـ (بالبرهان)

∠أ د و = ∠ جـ د هـ (تقابل بالرأس)

∠و أ د = ∠ هـ جـ د (بالتبادل)

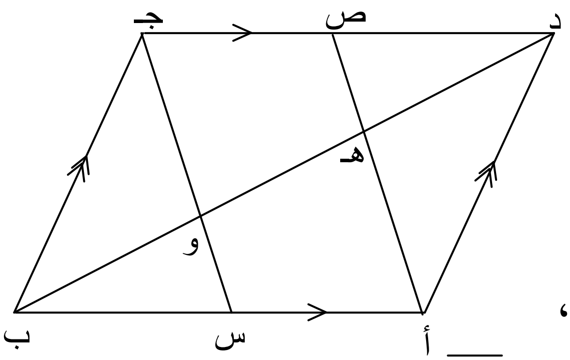
∴ المثلثان متطابقان (ض ، ز ، ز)

من التطابق نجد أن :

أ د = د جـ

مثال (١) :

في الشكل (٤-٧) المقابل



الشكل (٤-٧)

إذا كان :

أ ب جـ د متوازي أضلاع ،

س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{د جـ}}$

اثبت أن : $\overline{\text{د هـ}} = \overline{\text{هـ و}} = \overline{\text{و ب}}$

الحل :

المعطيات :

أ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{د ص}} = \overline{\text{ص جـ}}$ ، $\overline{\text{أ س}} = \overline{\text{س ب}}$

المطلوب إثباته :

$\overline{\text{د هـ}} = \overline{\text{هـ و}} = \overline{\text{و ب}}$

البرهان :

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع (معطى)

∴ $\overline{\text{د جـ}} = \overline{\text{أ ب}}$ ويوازيه

∵ $\overline{\text{د ص}} = \overline{\text{ص جـ}}$ ، ∴ $\overline{\text{ص جـ}} = \frac{1}{2}\,\overline{\text{د جـ}}$

∵ $\overline{\text{أ س}} = \overline{\text{س ب}}$ ، ∴ $\overline{\text{أ س}} = \frac{1}{2}\,\overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{ص جـ}} = \overline{\text{أ س}}$

∴ $\overline{\text{ص جـ}}$ // $\overline{\text{أ س}}$ (متقابلان في متوازي الأضلاع أ ب جـ د)

∴ أس جـص متوازي أضلاع (ضلعان متقابلان متوازيان متساويان)

∴ أص // س جـ (ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع)

في ▯ د و جـ : د ص = ص جـ (معطى)

ص هـ // جـ و (بالبرهان)

د هـ = هـ و (نظرية) .... (١)

في ▯ أ ب هـ : أ س = س ب (معطى)

س و // أ هـ (بالبرهان)

هـ و = و ب (نظرية) ....(٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

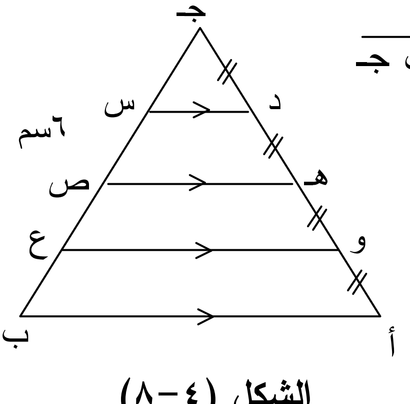
د هـ = هـ و = و ب

تمرين (٤–١)

{١} (أ) من الشكل المقابل : (٤–٨)

جد أطوال : ص ع ، ص ب ، ب جـ

(س ص = ٦سم)



الشكل (٤–٨)

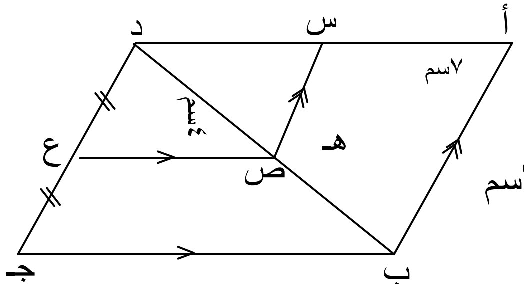
(ب) في الشكل (٤–٩)

د ع = ع جـ

د ص = ٤سم ، أ س = ٧سم

جد أطوال :

ب ص ، أ د



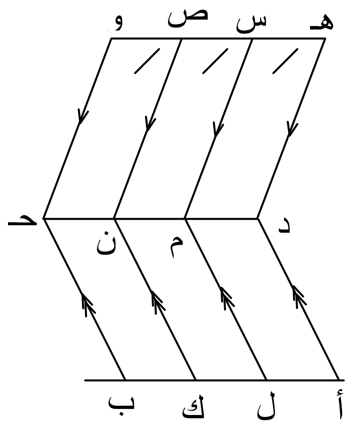
الشكل (٤–٩)

{٢} في الشكل (٤–١٠) المقابل :

هـ س = س ص = ص و

أثبت أن :

أ ل = ل ك = ك ب



الشكل (٤–١٠)

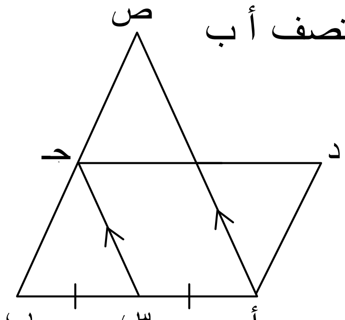
{٣} في الشكل (٤–١١) المقابل :

أ ب جـ د متوازي أضلاع ، س منتصف أ ب

س جـ // أ ص

أثبت أن :

جـ ص = أ د



الشكل (٤–١١)

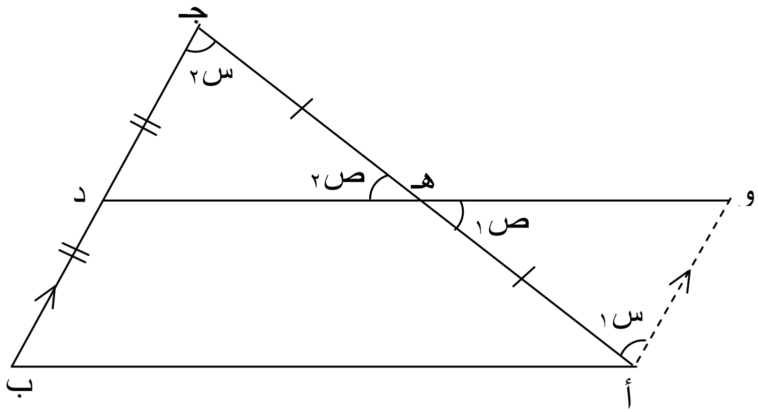
{٤} أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، د منتصف الوتر $\overline{\text{أ جـ}}$ ، أثبت أن :

$\overline{\text{ب د}} = \frac{1}{2}\ \overline{\text{أ جـ}}$

(إرشاد : أسقط العمود $\overline{\text{د هـ}}$ على $\overline{\text{أ ب}}$)

الدرس الثالث : نظرية (٣) :

المستقيم الذي يصل بين منتصفي ضلعين في مثلث – يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه .



المعطيات :

$\triangle$ أ ب جـ ، د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

المطلوب إثباته :

١- $\overline{\text{هـ د}}\ //\ \overline{\text{أ ب}}$

٢- $\overline{\text{هـ د}} = \frac{1}{2}\ \overline{\text{أ ب}}$

العمل :

من أ أرسم أ و // ب جـ ليلاقي امتداد د هـ في و

البرهان :

في △ أ هـ و ، △ جـ هـ د

س١ = س٢ (بالتبادل أ و // ب جـ)

ص١ = ص٢ (بالتقابل بالرأس)

أ هـ = هـ جـ (معطى)

∴ المثلثان متطابقان (ز ، ض ، ز)

∴ أ و = جـ د ، و هـ = هـ د

ولكن جـ د = د ب (معطى)

∴ أ و = ب د

ولكن :

أ و // ب د (عملاً)

∴ أ ب د و متوازي أضلاع (ضلعان متقابلان متوازيان متساويان)

∴ و د // أ ب وذلك يعني أن هـ د // أ ب ———— (١)

وكذلك و د = أ ب (ضلعان متقابلان في متوازي أضلاع)

ولكن هـ د = هـ و (بالبرهان)

∴ هـ د = $\frac{١}{٢}$ و د = $\frac{١}{٢}$ أ ب ———— (٢)

مثال (١) :

إذا كان : ك ، ل ، م ، ن منتصفات الأضلاع في الرباعي أ ب جـ د ، أثبت أن :

الرباعي ك ل م ن متوازي أضلاع .

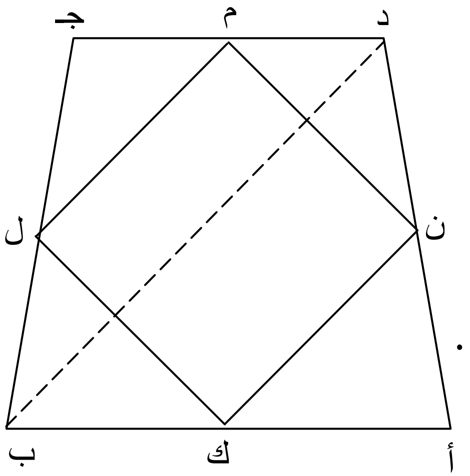
الحل :

المعطيات :

في الشكل (٤-١٢) :

أ ك = ك ب ، ب ل = ل جـ

جـ م = م د ، أ ن = ن د



الشكل (٤-١٢)

المطلوب إثباته :

الرباعي ك ل م ن متوازي أضلاع .

العمل :

صل ب د

البرهان :

في Δ أ ب د :

أ ك = ك ب ، أ ن = ن د (معطى)

$\therefore$ ن ك // د ب ، ن ك = $\frac{١}{٢}$ د ب (نظرية) .... (١)

وفي Δ ب جـ د :

ب ل = ل جـ ، جـ م = م د (معطى)

$\therefore$ م ل // د ب ، م ل = $\frac{١}{٢}$ د ب (نظرية) .... (٢)

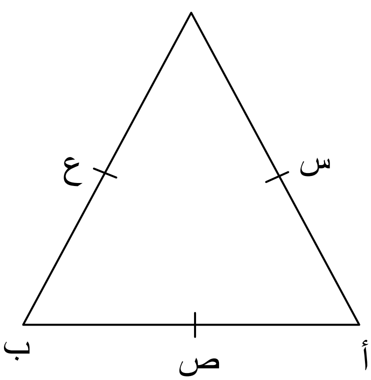
من (١) و (٢) نستنتج أن :

ن ك = م ل ، ن ك // م ل (وهما ضلعان متقابلان)

∴ ك ل م ن متوازي أضلاع (ضلعان متقابلان متساويان ومتوازيان)

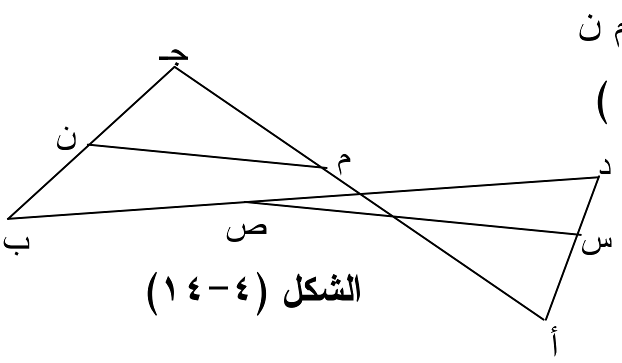
تمرين (٤-٢)

١) في الشكل (٤-١٣) س منتصف أ جـ ،
ص منتصف أ ب ، ع منتصف ب جـ
أثبت أن :
س ص ب ع متوازي أضلاع .



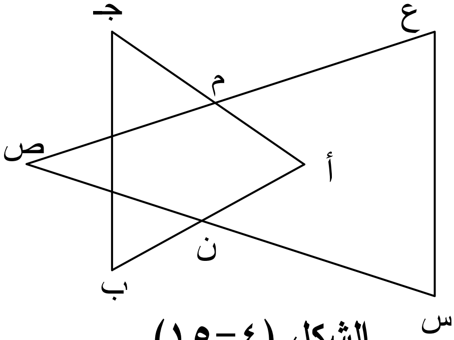
الشكل (٤-١٣)

٢) في الشكل (٤-١٤) :
إذا كان س ، ص ، م ، ن منتصفات
أ د ، د ب ، أ جـ ، ب جـ على الترتيب .
أثبت أن س ص = م ن
(إرشاد : صل أ ب)



الشكل (٤-١٤)

٣) في الشكل (٤–١٥) م منتصف أ جـ ، ع ص ، ن منتصف أ ب ، س ص ،
أثبت أن :
س ع = ب جـ .



الشكل (٤–١٥)

٤) أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع ، هـ منتصف ب جـ ، و نقطة على أ ب ، د نقطة على أ جـ حيث د هـ // أ ب ، و د // ب جـ ، أثبت أن :

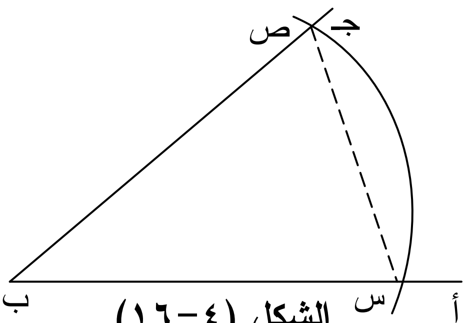
و ب هـ د معين .

الدرس الرابع : تطبيق في الرسم الهندسي :

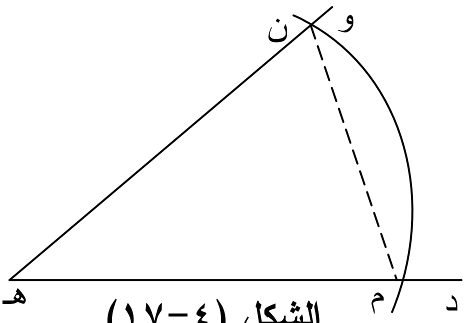
تقسيم قطعة مستقيمة إلى عدة قطع متساوية :

تمهيد :

أرسم زاوية مقدارها ٤٠° ثم أنقلها مستخدماً البرجل والمسطرة .



الشكل (٤–١٦)



الشكل (٤–١٧)

- لماذا نجد أن $\measuredangle$ أ ب جـ = $\measuredangle$ د هـ و ؟

في Δ س ب ص ، Δ م هـ ن

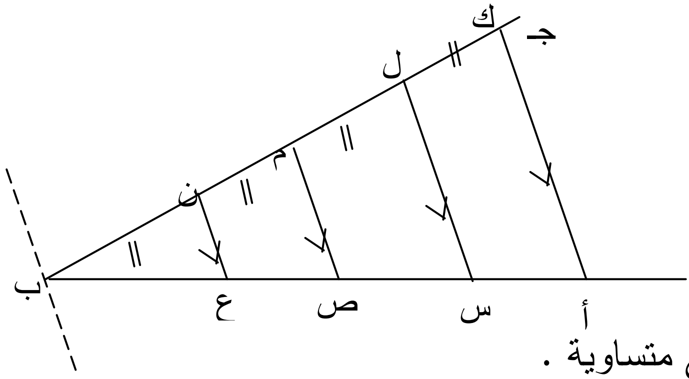
$\overline{\text{س ب}}$ = $\overline{\text{م هـ}}$ (نصفا قطر لنفس القوس)

$\overline{\text{ب ص}}$ = $\overline{\text{هـ ن}}$ (نصفا قطر لنفس القوس)

$\overline{\text{س ص}}$ = $\overline{\text{م ن}}$ (عملاً)

$\therefore$ المثلثان متطابقان (ض ، ض ، ض)

*** تقسيم قطعة مستقيمة معلومة مثل $\overline{\text{أ ب}}$ إلى أربع قطع متساوية**



المعطى :

القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$

المطلوب :

تقسيم $\overline{\text{أ ب}}$ إلى ٤ قطع متساوية .

خطوات العمل :

١- من ب أرسم المستقيم $\overline{\text{ب جـ}}$ بزاوية مناسبة .

٢- استخدام البرجل وبفتحة مناسبة أقطع على $\overline{\text{ب جـ}}$ بادئاً من ب أربع قطع متساوية $\overline{\text{ب ن}}$ = $\overline{\text{ن م}}$ = $\overline{\text{م ل}}$ = $\overline{\text{ل ك}}$ ثم صل $\overline{\text{ك أ}}$.

٣- مستعملاً البرجل وبطريقة نقل الزاوية أرسم المستقيمات $\overline{\text{ل س}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ، $\overline{\text{ن ع}}$ موازية للمستقيم $\overline{\text{ك أ}}$ لتقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في س ، ص ، ع (ويمكن رسم المستقيمات الموازية باستخدام المسطرة والمثلث) .

$\overline{\text{أ س}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{ع ب}}$ هي القطع المطلوبة .

البرهان :

بما أن المستقيمات المتوازية $\overline{\text{ك أ}}$ ، $\overline{\text{ل س}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ، $\overline{\text{ن ع}}$ تقطع قطعاً متساوية على ب جـ فأنها تقطع قطعاً متساوية على $\overline{\text{أ ب}}$.

∴ $\overline{\text{أ س}}$ = $\overline{\text{س ص}}$ = $\overline{\text{ص ع}}$ = $\overline{\text{ع ب}}$.

ملحوظة : تحقق من دقة العمل بالقياس .

تمرين (٤–٣)

١) أرسم $\overline{\text{أ ب}}$ ٨,٥سم ثم قسمه إلى ٣ قطع متساوية بالبرجل .

٢) أرسم $\overline{\text{س ص}}$ = ١١ سم ثم قسمه باستخدام البرجل إلى ٥ قطع متساوية ثم تحقق من دقة العمل بالقياس .

الدرس الخامس المتوسطات : نظرية (٤) نظرية المتوسطات :

تعريف :

المتوسط في المثلث هو المستقيم الذي يصل رأس المثلث بمنتصف الضلع المقابل .

- كم عدد متوسطات المثلث ؟

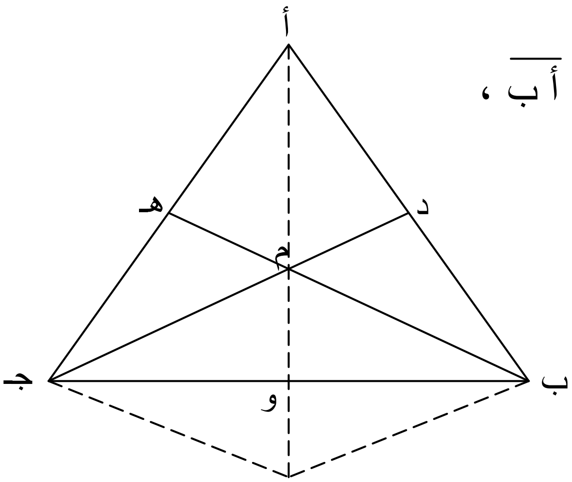
– أرسم أي مثلث ثم صل كل رأس بمنتصف الضلع المقابل . ماذا تلاحظ ؟

نظرية (٤) :

نظرية المتوسطات :

(١) متوسطات المثلث تتقاطع في نقطة واحدة .

(٢) نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط من جهة الرأس بنسبة ٢ : ١



الشكل (٤-١٩)

المعطى :

Δ أ ب جـ فيه د منتصف أ ب ،

هـ منتصف أ جـ ،

المتوسطان ب هـ ، جـ د

يتقاطعان في م .

المطلوب إثباته :

إذا مدّ أ م وقطع ب جـ في و فإن :

(١) ب و = و جـ

(٢) أ م : م و = ٢ : ١

العمل :

مدّ أ م و إلى ع حيث أ م = م ع

صل ب ع ، جـ ع

البرهان :

لإثبات (١) :

في Δ أ ع جـ :

هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ (معطى) ، م منتصف $\overline{\text{أ ع}}$ (بالعمل)

∴ $\overline{\text{م هـ}}$ // $\overline{\text{ع جـ}}$ (نظرية)

في Δ أ ب ع ، بنفس الطريقة السابقة نستنتج أن :

$\overline{\text{د م}}$ // $\overline{\text{ب ع}}$

∴ ب ع جـ م متوازي أضلاع (كل ضلعين متقابلين متوازيان)

∴ $\overline{\text{ب و}}$ = $\overline{\text{و جـ}}$ (قطرا متوازي الأضلاع ينــصف كــل منهمــا الآخر) (١)

لإثبات (٢) :

$\overline{\text{م و}}$ = $\overline{\text{و ع}}$ (قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر)

∴ $\overline{\text{م و}}$ = $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{م ع}}$

ولكن $\overline{\text{م ع}}$ = $\overline{\text{أ م}}$ (عملاً)

∴ $\overline{\text{م و}}$ = $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{أ م}}$

∴ $\overline{\text{أ م}}$ = ٢ $\overline{\text{م و}}$

∴ $\frac{\overline{\text{أ م}}}{\overline{\text{م و}}}$ = ٢ = $\frac{٢}{١}$

∴ $\overline{\text{أ م}}$: $\overline{\text{م و}}$ = ٢ : ١ (٢)

مثال (١) :

أ ب جـ د متوازي أضلاع ، هـ منتصف أ ب ، هـ جـ يقطع ب د في س ، امتداد أ س يقطع ب جـ في ص . اثبت أن :

ص منتصف ب جـ .

الحل :

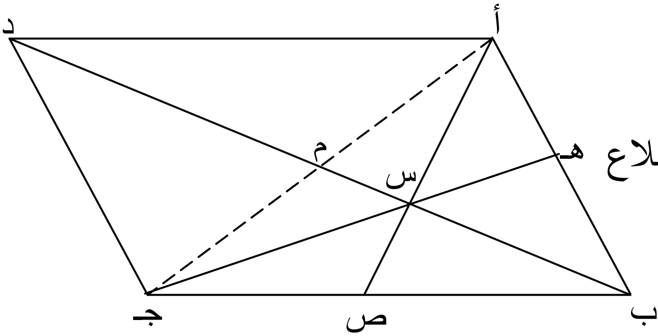
المعطيات :

أ ب جـ د متوازي أضلاع

هـ منتصف أ ب

المطلوب إثباته :

ب ص = ص جـ



الشكل (٤-٢٠)

العمل :

صل أ جـ ليقطع ب د في م

البرهان :

هـ منتصف أ ب (معطى)

م منتصف أ جـ (قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر)

∴ ب م ، جـ هـ متوسطان ويتقاطعان في س

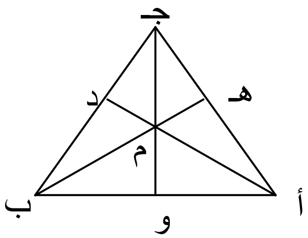
∴ س نقطة تقاطع المتوسطات .

∴ أ س ص هو المتوسط الثالث .

∴ ص منتصف ب جـ

تمرين (٤–٤)

(١) أ د ، ب هـ ، جـ و متوسطات المثلث أ ب جـ تتقاطع في م كما في الشكل (٤–٢١) اثبت أن : م نقطة تقاطع متوسطات المثلث د هـ و .



الشكل (٤–٢١)

(إرشاد : صل هـ و ، و د ، د هـ)

(٢) ع نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ فإذا كان أ ع = ب جـ . أثبت أن :

∠ ب ع جـ = °٩٠

(٣) أ د متوسط في ∆ أ ب جـ ، مد د إلى هـ حيث أ هـ = ٢ أ د أثبت أن :

امتداد ب أ ينصف جـ هـ

تمرين عام

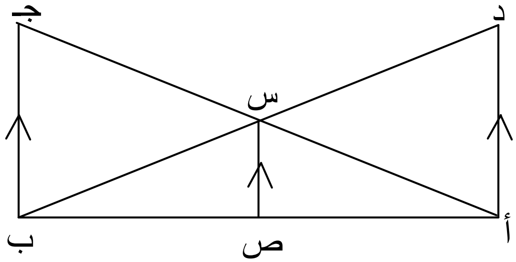
(١) في الشكل (٤–٢٢) إذا كان :

أ ص = ص ب ،

أ د // ص س // ب جـ

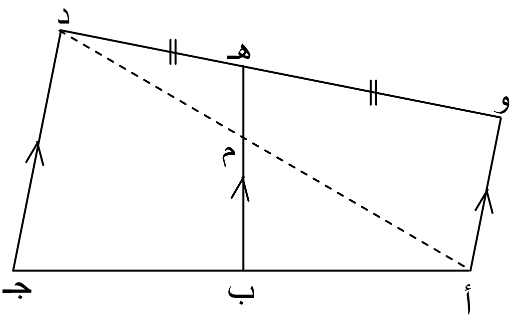
أثبت أن :

أ د = ب جـ



(٢) في الشكل (٤–٢٣) أثبت أن :

هـ ب = $\frac{١}{٢}$ (أ و + جـ د)



الشكل (٤–٢٣)

(٣) أ ب جـ مثلث مدّ ب جـ إلى د بحيث ب جـ = جـ د ، هـ نقطة على أ جـ حيث أ هـ = ٢ هـ جـ . أثبت أن امتداد د هـ ينصف أ ب.

(٤) أ ب ، د جـ هما الضلعان المتوازيان في شبه المنحرف أ ب جـ د ، س منتصف أ د ، ص منتصف ب جـ . أثبت أ ن :

(١) س ص // أ ب (٢) س ص = $\frac{١}{٢}$(أ ب + د جـ)

(٥) أرسم Δ أ ب جـ الذي فيه المتوسط ب د = ٧,٥سم والمتوسط جـ هـ = ٦سم ، الضلع ب جـ = ٧سم .

(٦) أرسم Δ أ ب جـ الذي فيه الضلع أ ب = ٧سم ، والمتوسط ب د = ٧,٥سم والمتوسط جـ هـ = ٩سم .

الوحدة الخامسة

المستوى الديكارتي والمعادلات الآنية

المستوى الديكارتي

الدرس الأول : تعيين موضع النقاط في المستوى الديكارتي

تمهيد :

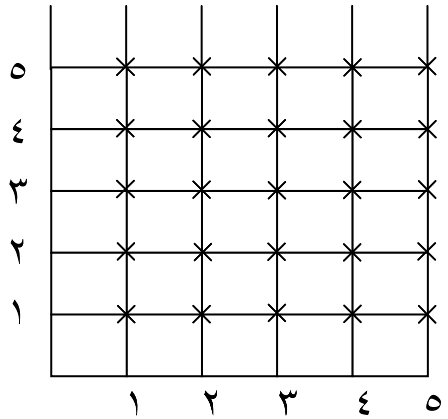
إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، فإن س × س كما نعلم تعني مجموعة جميع الأزواج المرتبة (س ،ص) ،حيث س ∈ س ، ص ∈ س . وتعرف بحاصل الضرب الديكارتي .

إحدى طرق تمثيل هذا الضرب بيانياً تبدو في الشكل (٥-١)

وهو تمثيل شبكي تتقاطع بها الخطوط الرأسية في مجموعة من النقط .

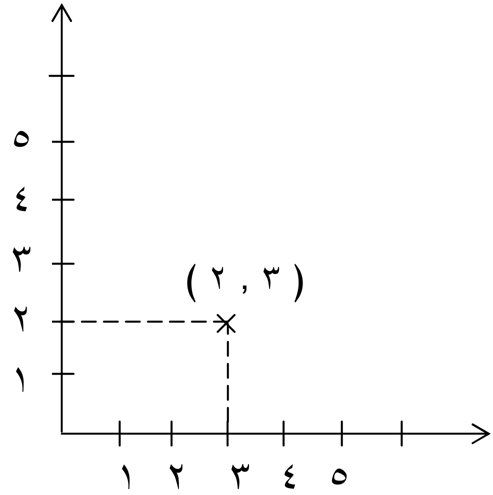
وكل نقطة يناظرها زوج مرتب .

فالزوج المرتب (٣ ، ٢) يناظر نقطة تقاطع الخط الرأسي الثالث مع الخط الأفقي الثاني .



الشكل (٥-١)

وبهذا المفهوم يمكن إحداث شبكة تمثل نقط تقاطع خطوطها الأفقية مع الخطوط الرأسية مجموعة الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى ط × ط إذا مثلنا على الخط الأفقي المجموعة ط وعلى الخط الرأسي المجموعة نفسها كما في الشكل (٥-٢)

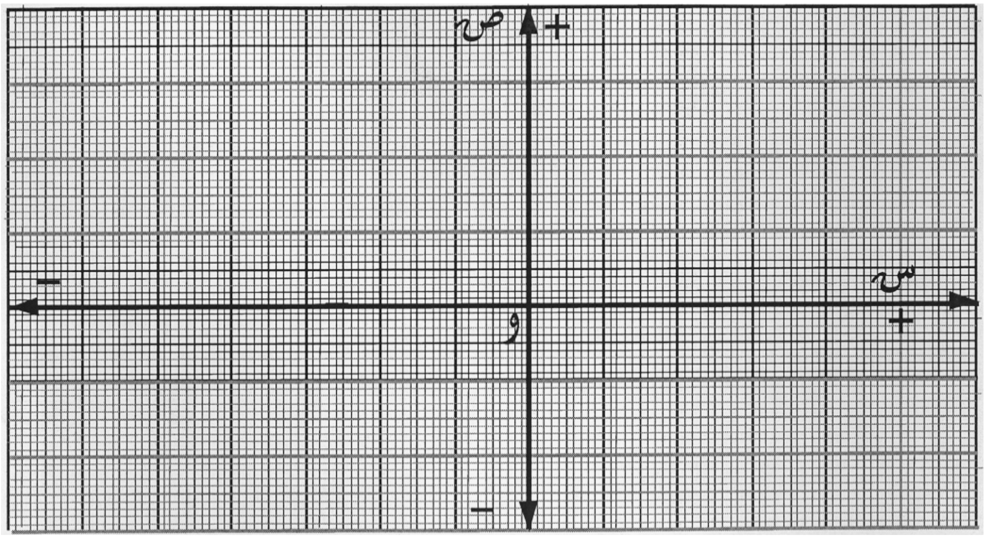


الشكل (٥–٢)

ويمكن زيادة عدد الأزواج المرتبة إذا تـصورنا شـبكة منـاظرة للمجموعة ح × ح حيث ح هي مجموعة الأعداد الحقيقة ، وبهذا يمكن الحصول على نقطة لكل زوج مرتب مثل (س ، ص) ∈ ح × ح وتسمى مجموعة النقط هذه **بالمستوى الديكارتي** .

ويمكن تمثيل ذلك بيانياً بخطين متعامدين متقاطعين في نقطة ولتكن (و) وتسمى **نقطة الأصل (الشكل (٥–٣))** ويناظرها الزوج المرتب (٠ ، ٠)

وكما سبق في خط الأعداد الحقيقية ، العدد والنقطة المناظرة لـه اسمان لشيء واحد ، فإن النقطة في المستوى الديكارتي والزوج المرتب



الشكل (٥-٣)

المناظر لها وليكن (س ، ص) هما اسمان لشيء واحد .

وفي هذه الحالة فإن س تسمى **الإحداثي السيني** ، ص تسمى **الإحداثي الصادي** .

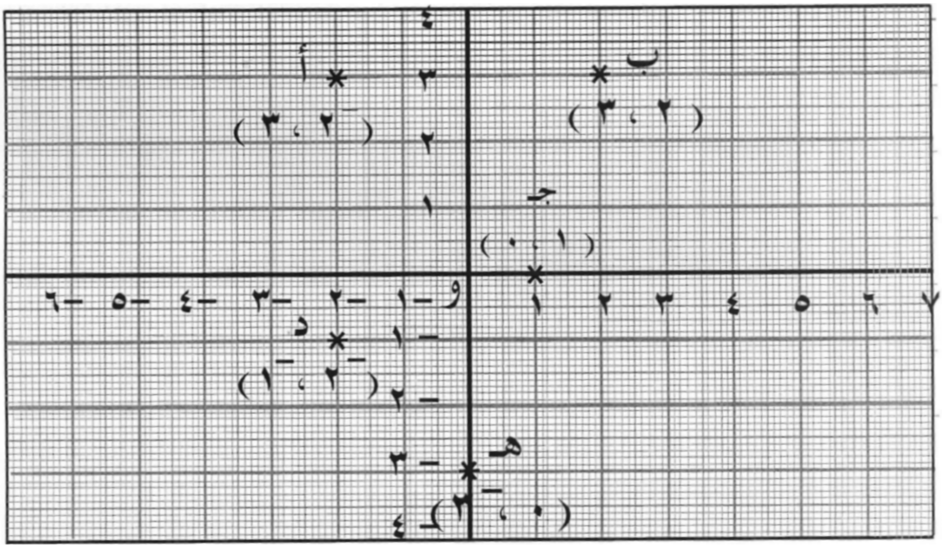
مثال (١) :

عين النقط الآتية في المستوى الديكارتي :

أ (‾٢ ، ٣) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (١ ، ٠) ،

د (‾٢ ، ‾١) ، هـ (٠ ، ‾٣) .

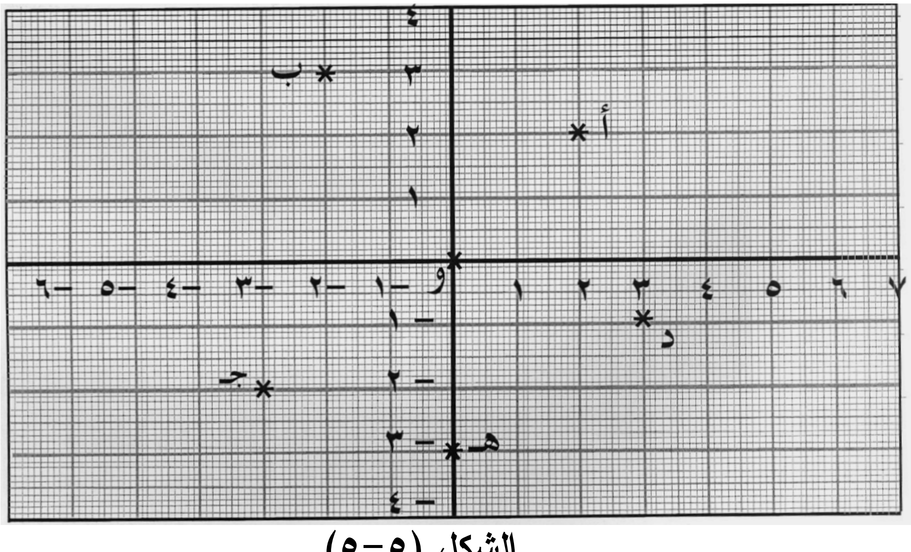
الحل :



الشكل (٥–٤)

مثال (٢) :

أكتب الأزواج المرتبة المناظرة للنقط : أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و في الشكل (٥–٥) أدناه :



الشكل (٥–٥)

الحل :

من الشكل (٥-٥) :

أ (٢ ، ٢) ، ب (-٢ ، ٣) ، جـ (-٣ ، -٢)

د (٣ ، -١) ، هـ (٠ ، -٣) ، و (٠ ، ٠)

ملاحظات :

١) يسمى الخط الأفقي **بالمحور السيني** ، والخط الرأسي **بالمحور الصادي** .

٢) على المحور السيني ، الأعداد الموجبة تمثل على النقط يمين نقطة الأصل و ، والسالبة على النقط يسار نقطة الأصل ، وعلى المحور الصادي ، الأعداد الموجبة تمثل على النقط أعلى نقطة الأصل و ، والسالبة أسفل نقطة الأصل .

٣) أي نقطة على المحور السيني تمثل بزوج من النوع (س ، ٠) وأي نقطة على المحور الصادي تمثل بزوج من النوع (٠ ، ص) .

٤) لأي نقطة ق إحداثيات (س ، ص) |س| يساوي بعد النقطة ق عن المحور الصادي ، و |ص| يساوي بعد النقطة ق عن المحور السيني .

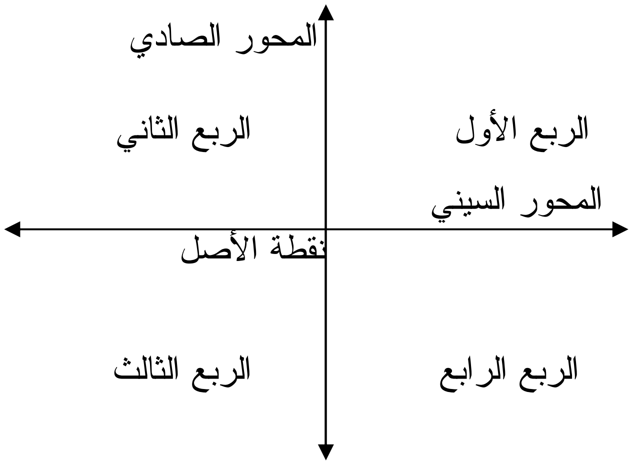
٥) أي نقطة تقع في الربع الأول ، يكون س > ٠ ، ص > ٠

أي نقطة تقع في الربع الثاني ، يكون س < ٠ ، ص > ٠

أي نقطة تقع في الربع الثالث ، يكون س < ٠ ، ص < ٠

أي نقطة تقع في الربع الرابع ، يكون س > ٠ ، ص < ٠

ترتيب الأرباع يوضحه الشكل (٥–٦) التالي :



الشكل (٥–٦)

مثال (٣) :

بدون الرسم ، اذكر الربع أو المحور الذي تقع فيه كل نقطة من النقط الآتية في المستوى الديكارتي :

أ (‾٢ ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (٣ ، ٠) ،

د (‾٣ ، ‾٥) ، هـ (٠ ، $\frac{^-٣}{٢}$) ، م (١,٧ ، ‾٥)

الحل :

- النقطة أ تقع في الربع الثاني . لأن الإحداثي السيني سالب والصادي موجب .
- النقطة ب تقع في الربع الأول لأن كلاً من الإحداثين موجب .
- النقطة جـ تقع على المحور السيني لأن الاحداثي الصادي يساوي الصفر .
- النقطة د تقع في الربع الثالث لأن كلاً من الاحداثين سالب .

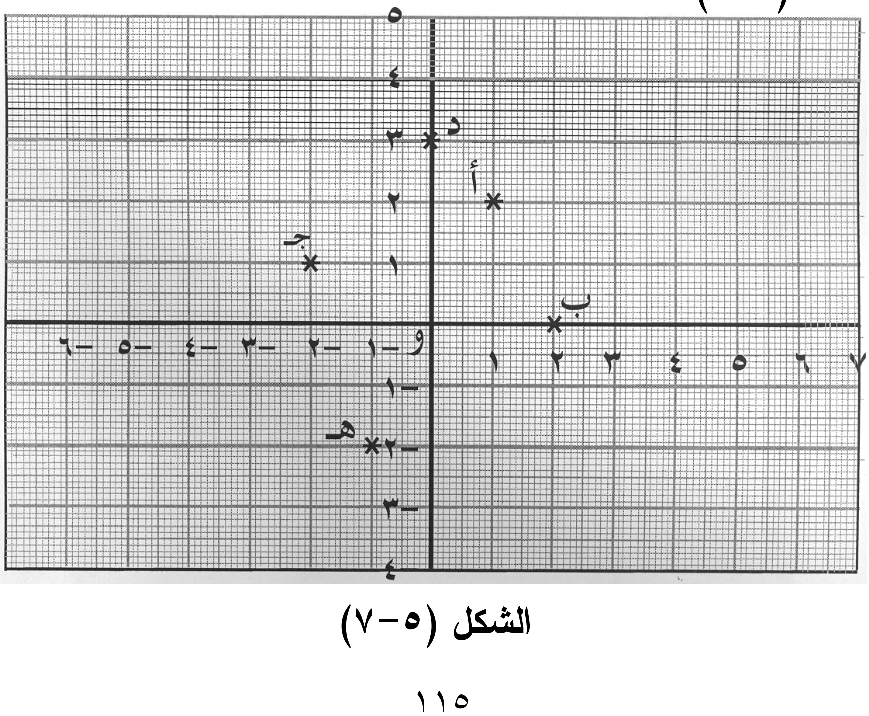
- النقطة هـ تقع على المحور الصادي لأن الإحداثي السيني يساوي الصفر .
- النقطة م تقع في الربع الرابع لأن الإحداثي السيني موجب والصادي سالب .

تمرين (٥–١)

(١) أنشئ المستوى الديكارتي في كراستك وعين عليه النقط :
(١ ، ٤) ، (¯٢ ، ٣) ، (¯٢ ، ¯٥) ، (٣,٥ ، ¯١,٥) ،
(٠ ، ¯٢) ، (٣ ، ٠) .

(٢) أذكر دون تمثيل بياني موقع كل من النقط التالية :
(٣ ، ٣) ، (٢ ، ¯٢) ، ($٥\frac{١}{٢}$ ، ٠) ، (٠ ، ٣) ،
(٠ ، ٠) ، (¯١ ، ٣) ، (¯٨ ، $\frac{\bar{}١}{٢}$) .

(٣) أكتب إحداثيات النقط أ ، ب ، جـ ، د ، هـ المبينة على الشكل (٥–٧) .



الشكل (٥–٧)

الدرس الثاني : معادلة الدرجة الأولي في مجهولين والخط المستقيم :

تدريب :

عين نقطتين من نقط المستوى الديكارتي تنتميان لمجموعة النقط

ق = {(س ، ص) : ص = س + ٢ ، س ∈ ح}

خذ مثلاً س = ٢ ، يكون ص = ٢ + ٢ = ٤ أي النقطة (٢ ، ٤)

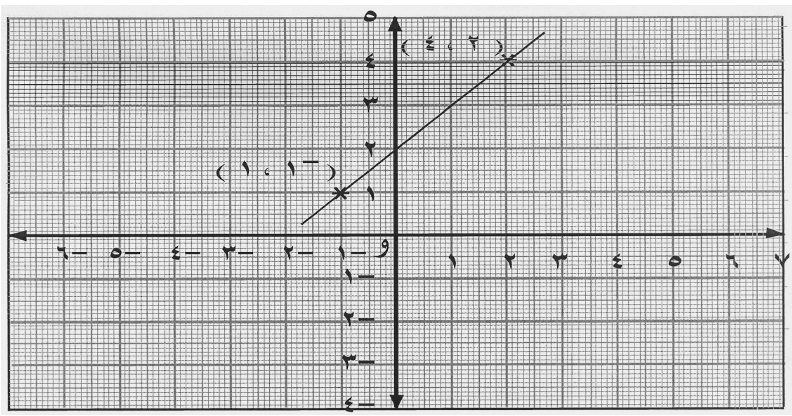
خذ س مثلاً تساوي $^{-}$١ يكون ص = $^{-}$١ + ٢ = ١ أي النقطة ($^{-}$١ ، ١)

صل بين النقطتين بقطعة مستقيمة ومدها من جهتيها ، وعين ثلاثة نقط تقع على المستقيم الناتج وثلاث نقط لا تقع عليه ، ودن نتائجك في جدول مثل الجدول (٥-١) :

نقط تقع على المستقيم		نقط لا تقع على المستقيم	
ق (س ، ص)	س + ٢	ق/ (س/ ، ص/)	س/ + ٢
أ (١ ، ٣)	١ + ٢	ك (٢ ، ٢)	٢ + ٢
ب (،)		ل (،)	
ج (،)		م (،)	

الجدول (٥-١)

- ماذا تلاحظ ؟
- من الرسم بالشكل (٥-٨) يمكن إكمال الجدول (٥-١)



الشكل (٥-٨)

ونلاحظ أنه :

١- لأي نقطة (س ، ص) تقع على المستقيم يكون ص = س + ٢

٢- لأي نقطة ($س^{/}$ ،$ص^{/}$) لا تقع على المستقيم يكون $ص^{/} \neq س^{/}$+ ٢

وإذا اخترت أي نقاط أخرى على المستقيم نجد أن إحداثيات تلك النقاط تحقق العلاقة ص = س + ٢ . وأي نقاط خارج المستقيم لا تحقق هذه العلاقة .

وبالمثل إذا أخذنا أي علاقة أخرى مثل ص = ٢س ، ٣ص = س + ١ ، ص = ٣س ، .....

ورسمنا هذه العلاقات على المستوى الديكارتي بالطريقة السابقة نجد أن الشكل البياني لكل منها هو خط مستقيم ، وإحداثي أي نقطة على أي من هذه المستقيمات تحقق العلاقة بين س ،ص الواردة في كل حالة ، وأي نقطة لا تقع على المستقيم لا تحقق تلك العلاقة .

ويمكن كتابة أي من هذه العلاقات في الصورة العامة أس + ب ص + جـ = ٠ ،حيث أ ، ب ، جـ إعداد حقيقية . أ يسمى **معامل س ،** ب يسمى **معامل ص** ، جـ يسمى **الحد المطلق** . (حيث أ ، ب لا يساويان الصفر معاً) .

الشكل البياني لأي معادلة من هذا النوع هو خط مستقيم . لذلك تعرف المعادلة التي في هذه الصورة **بالمعادلة الخطية** .

ويمكن الحصول على الشكل البياني المناظر لأي معادلة من هذا النوع بإيجاد نقطتين فقط تنتميان لمجموعة نقط المستوى التي تحقق

إحداثيات العلاقة بين المجهولين س ، ص لتلك المعادلة . ولكننا نأخذ نقطة ثالثة للتأكد من دقة الرسم والذي سيكون دائماً خطاً مستقيماً .

هناك حالات خاصة لهذه المعادلات :

- فالمعادلة أ س = جـ (أ ≠ ٠) بيانها مستقيم يوازي المحور الصادي .
- والمعادلة ب ص = جـ (ب ≠ ٠) بيانها مستقيم يوازي المحور السيني .

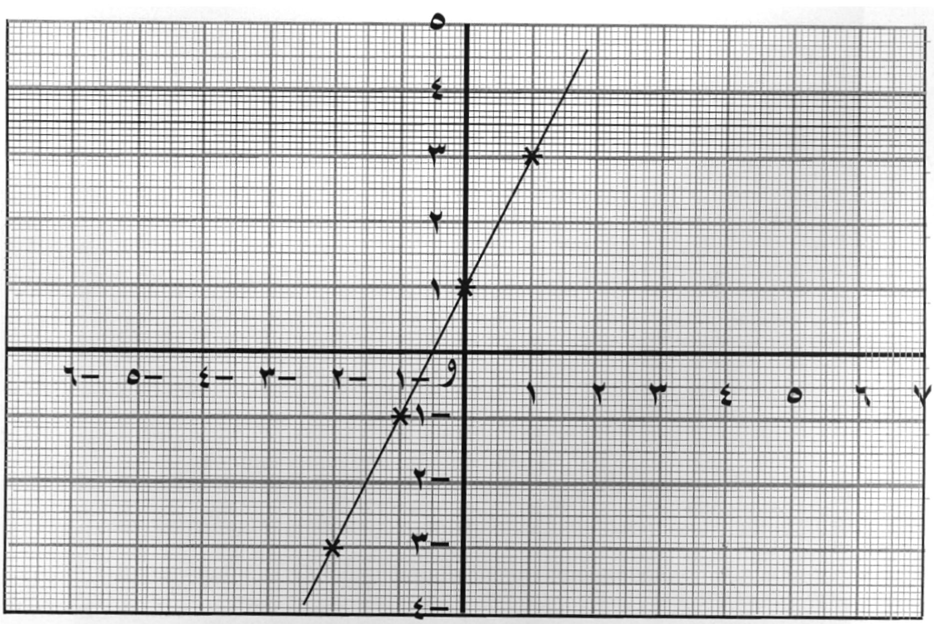
مثال (١) :

خذ المعادلة : ص = ٢س + ١ ، (س ∋ ح) أكمل الجدول التالي ، ثم عين النقط التي حصلت عليها في المستوى الديكارتي ، ثم صل بينها . ماذا تلاحظ ؟

س	٢س + ١	ص
-٣		
-٢		
-١		
٠		
١		
٢		

الحل :

س	٢س + ١	ص
-٣	-٦ + ١	-٥
-٢	-٤ + ١	-٣
-١	-٢ + ١	-١
٠	٠ + ١	١
١	٢ + ١	٣
٢	٤ + ١	٥



الشكل (٥-٩)

تلاحظ أن أي نقطة حصلت عليها في الجدول تقع على استقامة واحدة مع بقية النقط أي أن الشكل البياني لمجموعة النقط التي تحقق العلاقة ص = ٢س + ١ هو خط مستقيم وهي معادلة من الدرجة الأولى في مجهولين س ، ص .

مثال (٢) :

ارسم الخط البياني للمعادلة : ٢س + ٣ص = ٥

على المستوى الديكارتي .

الحل :

كما علمنا أنه يمكن تحديد أي ثلاث نقط بحيث تتحقق العلاقة الواردة في المعادلة . وذلك باختيار قيم مناسبة للمتغير س وتعويضها لإيجاد قيم ص المناظرة لها .

وبوضع المعادلة في الصورة : ص = $\frac{\text{٥ – ٢س}}{\text{٣}}$ وعوضنا عن س بالقيمة ١

تكون ص = $\frac{\text{٥ – ٢ × ١}}{\text{٣}} = \frac{\text{٣}}{\text{٣}} = \text{١}$

∴ النقطة (١ ، ١) إحدى النقط التي يمر بها الخط البياني

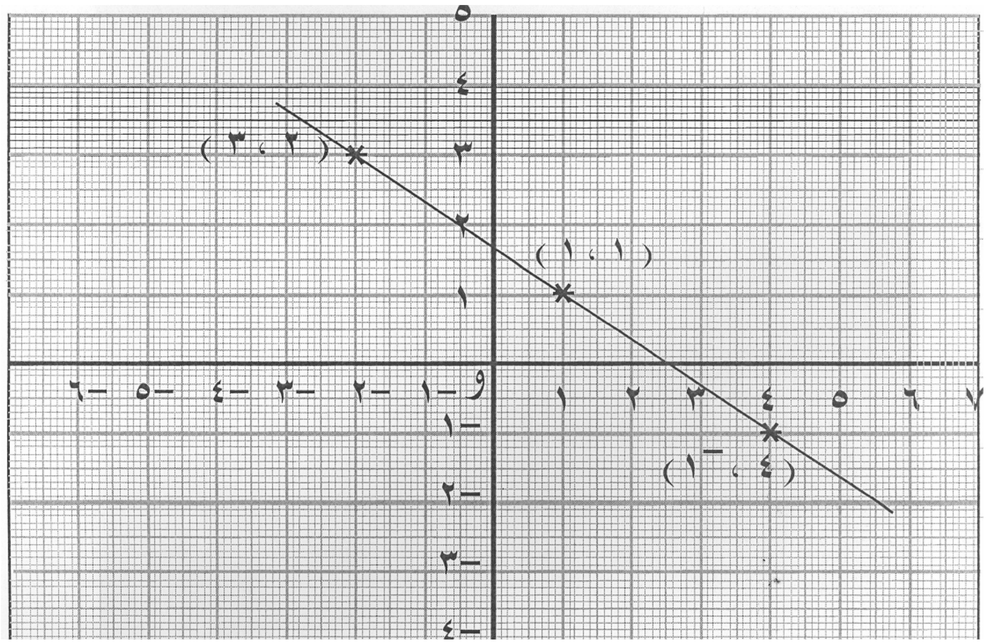
وبوضع س = $\overline{\text{٢}}$ ، ص = $\frac{\text{٥ – ٢ × }\overline{\text{٢}}}{\text{٣}} = \frac{\text{٩}}{\text{٣}} = \text{٣}$

∴ النقطة (‾٢ ، ٣) تقع على الخط البياني للمعادلة أيضاً . وبوضع

س = ٤ ، ص = $\frac{٥ - ٢ \times ٤}{٣}$ = $\frac{‾٣}{٣}$ = ‾١

∴ النقطة (٤ ، ‾١) على الخط البياني أيضاً ويمكن استخدام جدول كما مبين ، ثم نرسم النقط (١ ، ١) ، (‾٢ ، ٣) ، (٤ ، ‾١) ونصل بينهما بالمسطرة لنحصل على الخط البياني للمعادلة كما في الشكل (٥-١٠)

س	١	‾٢	٤
ص	١	٣	‾١



الشكل (٥-١٠)

تمرين (٥–٢)

مثل بيانياً كلا من المعادلات الخطية الآتية :

(١) ص = ٢س

(٢) ص + ٤س = ٠

(٣) ٢س – ص = ١

(٤) ٢س + ص = ٤

(٥) ٥س – ٢ص = ٢

الدرس الثالث:حل المعادلات الآنية من الدرجة الأولى في مجهولين بيانياً:

علمنا أن الشكل البياني الذي يمثل المعادلة التي علـــى الـــصورة أس + ب ص + جـ = ٠ هو خط مستقيم .

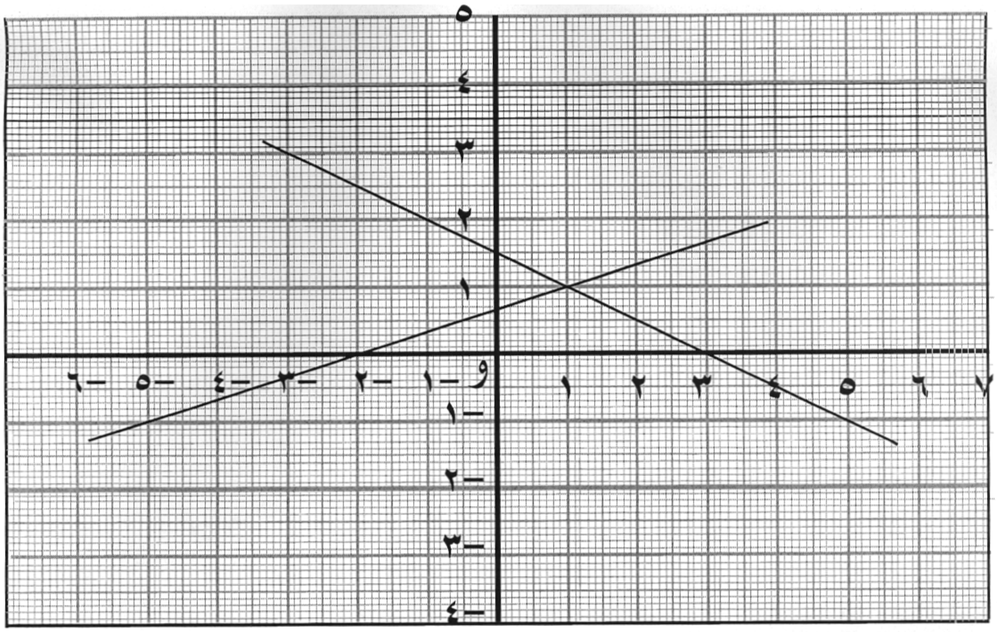
فإذا رسمنا المستقيم الذي يمثل المعادلة :

س + ٢ص = ٣ مثلاً على المستوى الديكارتي فكما مر بنا فـــي الدرس السابق أن إحداثيات أي نقطة تقع على هذا المستقيم تحقق العلاقة س + ٢ص = ٣ .

أي أن الإحداثي السيني زائداً ضعف الإحداثي الـــصادي يـــساوي دائماً ٣ بينما لا تتحقق هذه العلاقة بإحداثيات أي نقطـــة لا تقـــع علـــى المستقيم . وإذا رسمنا على نفس المستوى الديكارتي المستقيم الذي يمثـــل المعادلة : ٣ص – س = ٢

نجد كذلك إحداثيات جميع النقاط الواقعة على المستقيم تحقق هــذه العلاقة بينما لا تحققها إحداثيات النقاط الواقعة خارجه .

فإذا نظرنا إلى الشكل الناتج بعد رسم المــستقيمين نجــد أنهمــا يتقاطعان عند النقطة (١ ، ١) أي أن هذه النقطة تحقق العلاقة الــواردة في المعادلة الأولى وأيضاً تحقق العلاقة الواردة في المعادلــة الثانيــة . وهي نقطة واحدة والتي نقول عنها إنها حققت كلامن المعادلتين فــي آن واحد . وبالتالي تكون (١ ، ١) هي الحل المشترك للمعادلتين معــاً وأن مجموعة الحل للمعادلتين = {(١ ، ١)}



الشكل (٥-١١)

والمعادلتان اللتان من هذا النوع نسميهما معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى في مجهولين . وبجانب هذه الطريقة البيانية لحل المعادلتين الآنيتين توجد طريقة جبرية للحل سنتناولها في الدرس القادم .

والأمثلة التالية توضح خطوات الحل البياني للمعادلة الآنية :

مثال (١) :

مثل بيانياً المستقيمين للمعادلتين :

س + ٢ص = ٠

س – ٢ص + ٤ = ٠

ومن الرسم جد مجموعة حل المعادلتين .

الحل :

نرسم الخط البياني لكل من المعادلتين على نفس المستوى الديكارتي .

ضع أولاً ص بدلالة س مثلاً :

بما أن س + ٢ص = ٠ ، $\therefore$ ص = $\frac{\text{س}^{-}}{٢}$

بما أن س – ٢ص + ٤ = ٠ ، $\therefore$ ص = $\frac{\text{س} + ٤}{٢}$

ومن ثم يمكن تكوين الجدولين الآتيين :

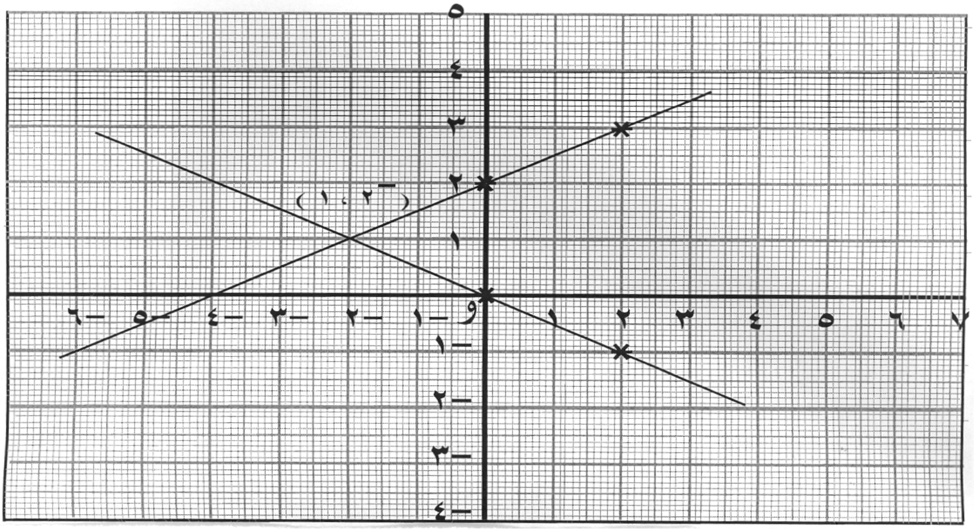
ص = $\frac{\text{س}^{-}}{٢}$

س	٢¯	٠	٢
ص	١	٠	١¯

ص = $\frac{\text{س} + ٤}{٢}$

س	٢¯	٠	٢
ص	١	٢	٣

يمكن فرض أي قيم للمتغير س وحساب القيمة المناظرة للمتغير ص . ولكن يفضل فرض قيم مناسبة للمتغير س بحيث يكون من السهل حساب قيم ص المناظرة ونرسم المستقيمين على نفس المستوى الديكارتي كما بالشكل (٥-١٢)



الشكل (٥-١٢)

ومن رسم الشكل البياني للمعادلتين ينتج مستقيمان يتقاطعان في نقطة واحدة هي (⁻٢ ، ١) معنى ذلك أن حل المعادلتين هو س = ⁻٢ ، ص = ١ .

∴ مجموعة الحل = {(⁻٢ ، ١)}

مثال (٢) :

جد مجموعة حل المعادلتين الآنيتين الآتيتين بيانياً :

٤س + ص = ٧ (١)

ص – س = ٣ (٢)

(س ، ص ∋ ح)

الحل :

قبل الرسم يجب تكوين جدولين لرصد ثلاث قيم للمتغير ص المناظرة للمتغير س لكل من المعادلتين بعد وضع ص موضوعاً للقانون.

ص = ٧ − ٤س

س	٠	١	٢
ص	٧	٣	−١

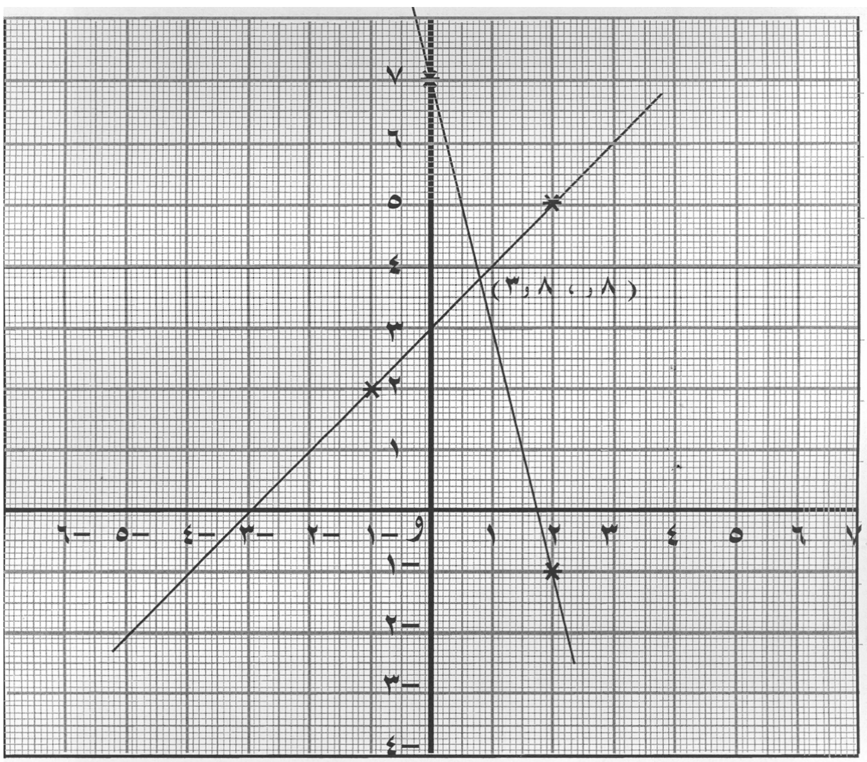
ص = ٣ + س

س	−١	٠	٢
ص	٢	٣	٥

من الرسم بالشكل (٥−١٣) ينتج أن :

س = ٠,٨ ، ص = ٣,٨

∴ مجموعة الحل = {(٠,٨ ، ٣,٨) }



الشكل (٥−١٣)

مثال (٣) :

حل المعادلتين : ٢س + ٣ص = ١٢

٣س –٢ص = ٥ ، بيانياً .

الحل :

بما أن ٢س + ٣ص = ١٢ ∴ ص = $\frac{١٢ - ٢س}{٣}$

بما أن ٣س – ٢ص = ٥ ∴ ص = $\frac{٣س - ٥}{٢}$

ص = $\frac{١٢ - ٢س}{٣}$

س	٠	٣	٦
ص	٤	٢	٠

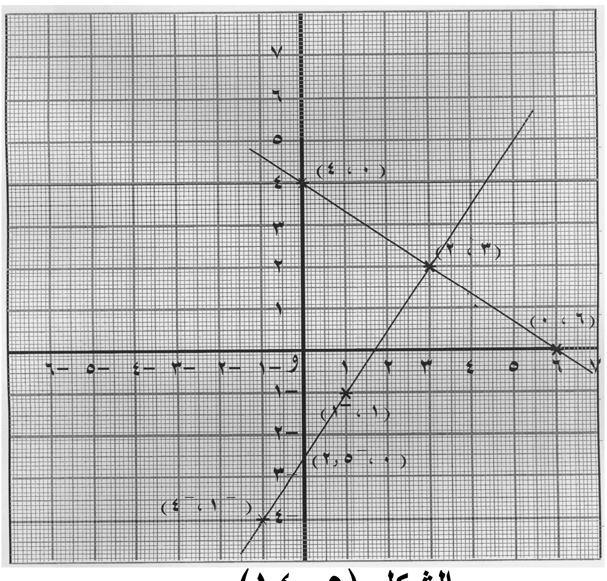
ص = $\frac{٣س - ٥}{٢}$

س	٠	١	١⁻
ص	$\frac{٥^-}{٢}$	١⁻	٤⁻

وبعد رسم الشكل (٥–١٤) نجد أن نقطة التقاطع هي (٣ ، ٢)

س = ٣

ص = ٢



الشكل (٥–١٤)

تمرين (٥-٣)

جد مجموعة الحل لكل من أزواج المعادلات الآتية بيانيـــاً : (س ، ص ∋ ح)

(١) س + ص = ٣ ، ٣س – ص = ١

(٢) س – ص = ١ ، س + ٢ص = ٧

(٣) س – ٢ص = ١ ، ٢س + ص = ٢

(٤) ص = ٢س + ٢ ، ٣س + ٢ص = ٤

(٥) ٣ص = ٢س + ٨ ، س + ص = ١

(٦) س + ٣ص = ٠ ، س – ٣ص = ٦

(٧) س = ص ، ٣س = ص – ٢

(٨) ٤س – ٢ص = ٧ ، س + ٣ص = ٧

(٩) س + ص = ٣ ، ٥س – ٥ص = ١

(١٠) ٢س – ٢ص = ٥ ، ٢س + ٣ص + ١ = ٠

الدرس الرابع : حل المعادلات الآنية من الدرجة الأولى في مجهولين جبرياً : طريقة الحذف بالجمع:

إذا اخذنا المعادلتين :

س + ص = ١٠ ، س – ص = ٤

واردنا حلهما جبرياً فسنجد أن كلاً من المعادلتين تحقق بعدد غير منته من القيم . فمثلاً من حلول المعادلة الأولى س + ص = ١٠ يوضحها الجدول (٥–٢) التالي :

س	١	-٢	٠	٧	٣	٥
ص	٩	١٢	١٠	٣	-١٣	٥

الجدول (٥–٢)

ومن حلول المعادلة س – ص = ٤ يوضحها الجدول (٥–٣) التالي :

س	١	-٢	٠	٧	٣	٥
ص	-٣	-٦	-٤	٣	-١	١

الجدول (٥–٢)

ونلاحظ أن الحل (٧ ، ٣) هو حل مشترك للمعادلتين وهذا هو الحل لنظام المعادلتين ، ويحقق شرطي المعادلتين في آن واحد لأن :

٧ + ٣ = ١٠ ، ٧ – ٣ = ٤

ولكن كيف نصل جبرياً لهذا الحل :

لنأخذ المعادلتين :

س + ص = ١٠

س – ص = ٤

نلاحظ أن جمع المعادلتين يؤدي إلى حذف المجهول ص

س + ص = ١٠

س – ص = ٤

٢س = ١٤

٢س = ١٤ ، معادلة بمجهول واحد ، حلها س = ٧

وبالتعويض عن س في إحدى المعادلتين (الأولى مثلاً) نجد :

٧ + ص = ١٠

ص = ١٠ – ٧

∴ ص = ٣

تحقق من أن الزوج المرتب (٧ ، ٣) يحقق كل من المعـــادلتين . وبالتالي هو حل للنظام .

لحل نظام من معادلتين بمجهولين ، نحذف أحد المجهولين ، فنحصل على معادلة بمجهول واحد ، حلها يؤدي إلى حل النظام .

هناك ثلاث طرق رئيسة للحذف سوف نوردها فيما يلي :

(١) طريقة الحذف بالجمع :

طريقة الحذف بالجمع ترتكز على الخطوتين التاليتين :

(١) نضرب طرفي المعادلتين بعددين نختارهما بحيث يصبح معاملاً أحد المجهولين متناظرين . (متساويين في المقدار ومختلفين في الإشارة) إن لم يكونا كذلك .

(٢) نجمع المعادلتين الناتجتين ، فنحصل على معادلة بمجهول واحد . أو نجعل معاملي أحد المجهولين متساويين ثم نطرح المعادلتين لنحصل على معادلة في المجهول الآخر .

ففي المثال التالي :

٣س + ٤ص = ١ (١)

٢س – ٣ص = ١٢ (٢)

لكي نحذف المجهول س ، نضرب طرفي المعادلة الأولى بالعدد ٢ ، ثم نضرب طرفي المعادلة الثانية بالعدد -٣ ، فنحصل على نظام يتناظر فيه معاملا المجهول س

وبضرب المعادلة (١) بالعدد ٢ : ٦س + ٨ص = ٢

وبضرب المعادلة (٢) بالعدد -٣ : -٦س + ٩ص = -٣٦

∴ بالجمع ١٧ص = -٣٤

ص = -٢

نعوض عن ص بقيمته -٢ في إحدى المعادلتين (الأولى مثلاً)

٣س + ٤ × ¯٢ = ١

٣س – ٨ = ١

٣س = ٩

∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {(٣ ، ¯٢)}

التحقق من صحة الحل :

الطرف الأيمن للمعادلة (١) = ٣ × ٣ + ٤ × ¯٢

= ٩ + ¯٨ = ١ = الطرف الايسر

الطرف الأيمن للمعادلة (٢) = ٢ × ٣ – ٣ × ¯٢

= ٦ + ٦ = ١٢ = الطرف الأيسر

مثال (٢) :

جد مجموعة الحل للمعادلتين الآنيتين الآتيتين :

٣س – ٧ = ص

٤س – ٥ص = ٢

الحل :

نرتب المعادلتين أولاً :

٣س – ص = ٧ (١)

٤س – ٥ص = ٢ (٢)

نضرب المعادلة (١) في ٥ لنوحد معامل ص :

١٥س – ٥ص = ٣٥ (٣)

٤س – ٥ص = ٢ (٢)

∴ بالطرح : ١١س = ٣٣

∴ س = ٣

وبالتعويض في المعادلة (١) :

٣ × ٣ – ص = ٧

∴ – ص = –٢

ص = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٣ ، ٢)}

تمرين (٥–٤)

استخدم طريقة الحذف بالجمع لايجاد مجموعة الحل لكل من :

(١) س + ص = ١ ، ٢س – ص = ٥

(٢) س – ص = ٤ ، ٢س + ٣ص = ٣

(٣) س – ٢ص – ٥ = ٠ ، ص – ٢س + ٤ = ٠

(٤) ٢س – ص = ٧ ، ٢ص + س = ٦

(٥) س – ٥ = ٣ص ، ٦س + ٧ = ١٢ص

(٦) ص + ٢س = ١١ ، ٥(س – ٣) = ص + ٤

الدرس الخامس : طريقة الحذف بالمقابلة :

يمكن أن نحذف أحد المجهولين في المعادلات الآنية بطريقة أخرى تعرف بطريقة الحذف بالمقابلة ، وترتكز هذه الطريقة على الخطوتين التاليتين :

(١) حساب قيمتي أحد المجهولين بدلالة المجهول الآخر في كل من المعادلتين .

(٢) تساوي قيمتي المجهول يعطي معادلة ذات مجهول واحد .

مثال (١) :

جد مجموعة حل المعادلتين :

س + ٢ص = ١

٣س + ٤ص = ٧

(س ، ص ∋ صـ)

الحل :

لو حسبنا قيمة المجهول س بدلالة المجهول ص في المعادلة الأولى ، ثم حسبنا قيمته بدلالة المجهول ص في المعادلة الثانية ، فإنه بإمكاننا أن نساوي القيمتين لآن قيمة المجهول في المعادلتين هي نفسها :

∴ من المعادلة الأولى : س = ١ − ٢ص

ومن المعادلة الثانية : س = $\frac{\text{٧ − ٤ص}}{\text{٣}}$

∴ ١ − ٢ص = $\frac{\text{٧ − ٤ص}}{\text{٣}}$

∴ ٣ − ٦ص = ٧ − ٤ص

¯٢ص = ٤

∴ ص = ¯٢

وبالتعويض في المعادلة الأولى :

س = ١ − ٢ص

∴ س = ١ − ٢ × ¯٢ = ٥

∴ مجموعة الحل هي : {(٥ ، ¯٢)}

مثال (٢) :

حل المعادلتين الآنيتين :

٢س − ٥ص = ١٤

٤س + ٣ص = ٢

الحل :

نحسب قيمتي س من المعادلتين

س = $\frac{\text{١٤ + ٥ص}}{\text{٢}}$

س = $\frac{\text{٢ − ٣ص}}{\text{٤}}$

وبتساوي القيمتين

$$\frac{١٤ + ٥ص}{٢} = \frac{٢ - ٣ص}{٤}$$

وبالضرب في ٤ : ٢٨ + ١٠ص = ٢ − ٣ص

$$١٣ص = \overline{}٢٦$$

$$\therefore ص = \overline{}٢$$

وبتعويض قيمة ص في إحدى المعادلتين :

$$س = \frac{١٤ + ٥ \times \overline{}٢}{٢} = \frac{١٤ + \overline{}١٠}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

$\therefore$ مجموعة الحل = {(٢ ، ‾٢)}

تمرين (٥–٥)

مستخدماً طريقة طريقة الحذف بالمقابلة حـــل أزواج المعـــادلات الآنية الآتية : (س ، ص ∈ ح)

(١) ص = س + ١ ، س = ٢ص − ٥

(٢) ص = ٥ − س ، ص − س = ١

(٣) س + ص = ٧ ، ص = ١٠ − ٢س

(٤) ٢س − ص = ١ ، س + ٢ص = ٨

(٥) س − ص − ١ = ٠ ، ٢س + ص − ١ = ٠

(٦) ٢س − ٣ص = ٢ ، س + ٣ص = ٤

(٧) س − ص = ٦ ، $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$

(٨) $\frac{س}{٢} = \frac{٢ص}{٣}$ ، $\frac{س + ٢ص}{٥} = ٢$

الدرس السادس : طريقة الحذف بالتعويض :

في هذه الطريقة نضع إحدى المعادلتين على الصورة :

$$ص = \frac{جـ - أ س}{ب} \quad حيث \; ب \neq ٠$$

ونسميها المعادلة (٣) ثم نقوم بالتعويض عن ص في المعادلة الأخرى فتنتج معادلة من الدرجة الأولى في مجهول واحد (س) نجد منها قيمة س ، وبعد ذلك وبالتعويض في المعادلة (٣) نحصل على قيمة المتغير ص .

ويمكن التعويض عن س بدلاً من ص بوضع المعادلة على الصورة : $س = \frac{جـ - ب ص}{أ}$ حيث $أ \neq ٠$

ونلاحظ أنه مهما كانت طريقة الحذف سواء بالتعويض أو بالجمع أو بالمقابلة فهي توصلنا إلى معادلة بمجهول واحد نحلها وبالتالي نتوصل إلى حل النظام .

مثال (١) :

جد مجموعة حل المعادلتين :

$$٣س - ٢ص = ٤ \quad (١)$$

$$٢س + ص = ٥ \quad (٢)$$

الحل :

نحسب ص من المعادلة الثانية بدلالة س

ص = ٥ – ٢س   (٣)

نعوض قيمة ص بدلالة س في المعادلة (١)

٣س – ٢(٥ – ٢س) = ٤

وهكذا تحولت المعادلة الأولى إلى معادلة بمجهول واحد س بعد أن حذف المجهول ص بالتعويض عنه بدلالة س .

نحل المعادلة الجديدة :

٣س – ١٠ + ٤س = ٤

٧س = ١٤   ،   ∴ س = ٢

نعوض قيمة س في المعادلة (٣)

ص = ٥ – ٢ × ٢

∴ ص = ١

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، ١)}

مثال (٢) :

جد مجموعة حل المعادلتين الآنيتين التاليتين :

٢س + ٣ص = ١٢   (١)

٣س – ٢ص = ٥   (٢)

الحل :

نوجد قيمة س بدلالة ص من (١)

$$\text{س} = \frac{١٢ - ٣\text{ص}}{٢} \qquad (٣)$$

نعوض قيمة س من (٣) في المعادلة (٢)

$$\frac{٣(١٢-٣ص)}{٢} -٢ص = ٥$$

$$\frac{٣٦- ٩ص}{٢} - ٢ص = ٥$$

$$٣٦ - ٩ص - ٤ص = ١٠$$

$$\therefore ٣٦ - ١٣ص = ١٠$$

$$\therefore {}^{-}١٣ص = {}^{-}٢٦$$

$$\therefore ص = ٢$$

نعوض ص بقيمته ٢ في المعادلة (٣)

$$س = \frac{١٢ - ٣ \times ٢}{٢} = \frac{١٢ - ٦}{٢} = \frac{٦}{٢}$$

$$\therefore س = ٣$$

∴ مجموعة الحل = {(٣ ، ٢)}

مثال (٣) :

حل المعادلتين الآنيتين التاليتين :

٢س + ص – ٣ = ٠ ، س – ٢ص = ٤

الحل :

٢س + ص – ٣ = ٠ (١)

س – ٢ص = ٤ (٢)

من (١) ص = ٣ – ٢س (٣)

بالتعويض في المعادلة (٢)

س – ٢ (٣ – ٢س) = ٤

∴ س – ٦ + ٤س = ٤

٥س = ١٠

∴ س = ٢

والتعويض في المعادلة (٣)

ص = ٣ – ٢ × ٢ = ¯١

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، ¯١)} " تحقق من صحة الحل "

تمرين (٥ – ٦)

(١) استخدم طريقة التعويض لحل المعادلات الآتية :

(أ) ٢س – ص = ١ ، س + ٢ص = ٨

(ب) س + ص = ٤ ، ص = س + ٢

(جـ) س – ص – ١ = ٠ ٢س + ص – ١١ = ٠

(د) س + ص – ٧ = ٠ ، ص = ١٠ – ٢س

(هـ) س = ص + ١ ، ٢ص = ٣ – س

(٢) حل المعادلات التالية :

(أ) ٣س – ص = ¯٦ ، ٢ص + ٣س = ١٢

(ب) ٥س + ٣ص = ١ ، س – ٢ص = ٨

(جـ) ٢س + ٣ص = ¯١ ، ٥س – ٢ص = ٧

(د) ٤س + ٣ص = ¯٢ ، ٢س – ٥ص = ١٢

(هـ) $\frac{س + ص}{٣}$ = ٢ ، ٣س + $\frac{٢}{٥}$ ص = ٥

الدرس السابع : مسائل لفظية على المعادلات الآنية :

توجد مسائل في حياتنا يقتضي حلها استخدام مفهوم المعادلات الآنية ، وعادة في هذه الحالة لدينا مجهولان يراد معرفة قيمة كل منهما .

لذلك لابد أن تتوفر لدينا مجموعتان من الحقائق تؤديان إلى معادلتين آنيتين المطلوب في هذه الحالة قراءة المسألة جيداً حتى نستطيع استخراج المعلومات التي تساعدنا على ترجمة المسألة إلى هاتين المعادلتين .

مثلاً : عددان ثلاث أمثال اصغرهما يزيد عن ضعف الأكبر بمقدار ٣ ، و٧ أمثال الأصغر يزيد عن ٥ أمثال الأكبر بمقدار ٢ ما العددان ؟

ولكي نحل المسألة نقرأها جيداً ، ونحدد المطلوب إيجاده . (في هذا المثال العددين) . إذا نفرض للعدد الأصغر س وللأكبر ص . نقرأ المسألة مرة أخرى لنجد العلاقة بين س ، ص في كل حالة .

ثلاثة أمثال الأصغر يزيد عن ضعف الأكبر بمقدار ٣ . أي إذا طرحنا ضعف الأكبر من ثلاثة أمثال الأصغر ينتج ٣

٣س – ٢ص = ٣ (١)

أيضاً ٧ أمثال الأصغر يزيد عن ٥ أمثال الأكبر بمقدار ٢

٧س – ٥ص = ٢ (٢)

لقد حصلنا على معادلتين يمكن حلهما آنياً .

بضرب (١) في ٥ ينتج ١٥س – ١٠ص = ١٥

وبضرب (٢) في ¯٢ ينتج ¯١٤س + ١٠ص = ¯٤

وبالجمع   س = ١١

∴ بالتعويض في المعادلة (١)

٣ × ١١ – ٢ص = ٣

٣٣ – ٢ص = ٣

¯٢ص = ¯٣٠

∴ ص = ١٥

∴ العدد الأصغر = ١١   العدد الأكبر = ١٥

- تحقق من صحة الأجابة .

مثال (٢) :

محيط مستطيل ٧٤سم ، يزيد طوله عن عرضه بمقدار ١٣سم .

ما طول المستطيل وعرضه ؟

الحل :

نفترض أن عرض المستطيل = س سم وطوله = ص سم

∴ ٢س + ٢ص = ٧٤   (١)

ص – س = ١٣   (٢)

بضرب (٢) في ٢

٢ص – ٢س = ٢٦   (٣)

بجمع (١) ، (٣)   ٤ص = ١٠٠

∴ ص = ٢٥

∴ ٢٥ – س = ١٣

∴ $\bar{}$س = $\bar{}$١٢

∴ س = ١٢سم

∴ طول المستطيل = ٢٥سم

عرض المستطيل = ١٢سم

- هل يمكن حل هذا المثال بطريقة أخرى ؟

مثال (٣) :

قبل سنتين كان عمر نزار ضعف عمر أخيه مازن . وبعد ٧ سنوات من الآن يصير عمر مازن $\frac{٤}{٥}$ عمر أخيه نزار . جد عمر كل منهما الآن .

الحل :

نفرض أن عمر نزار الآن = س سنة وعمر مازن الآن = ص سنة

عمر نزار قبل سنتين = س – ٢

عمر مازن قبل سنتين = ص – ٢

∴ س – ٢ = ٢(ص – ٢)

س – ٢ = ٢ص – ٤

س – ٢ص = $\bar{}$٢ (١)

عمر نزار بعد ٧ سنوات = س + ٧

عمر مازن بعد ٧ سنوات = ص + ٧

∴ ص + ٧ = $\frac{٤}{٥}$ (س + ٧)

٥ص + ٣٥ = ٤س + ٢٨

٥ص – ٤س = -٧ (٢)

من (١) س = ٢ص – ٢

∴ ٥ص – ٤(٢ص – ٢) = -٧

٥ص – ٨ص + ٨ = -٧

-٣ص = -١٥ ∴ ص = ٥

∴ س = ٢ × ٥ – ٢ = ٨

∴ عمر نزار الآن = ٨ سنوات ، عمر مازن الآن = ٥ سنوات

مثال (٤) :

عدد مكون من رقمين ، يساوي ٧ أمثال مجموع رقميه . ويزيد عن العدد المكون من معكوس الرقمين بمقدار ٣٦ . ما العدد ؟

الحل :

نفرض أن رقم الآحاد س ، ورقم العشرات ص

∴ العدد = س + ١٠ص

مجموع الرقمين = س + ص

∴ س + ١٠ص = ٧(س + ص)

س + ١٠ص = ٧س + ٧ص

٦س – ٣ص = ٠ ، ٢س – ص = ٠

∴ ص = ٢س (١)

العدد المكون من معكوس الرقمين = ص + ١٠س

∴ س + ١٠ص − (ص + ١٠س) = ٣٦

س + ١٠ص − ص − ١٠س = ٣٦

٩ص − ٩س = ٣٦

ص− س = ٤

بتعويض (١) في (٢)

٢س − س = ٤

∴ س = ٤ ، ص = ٨

رقم الآحاد = ٤ ، رقم العشرات = ٨

∴ العدد = ٨٤

- تحقق من صحة الإجابة .

تمرين (٥−٧)

(١) ما العددان اللذان مجموعهما ١١٢ والفرق بينهما ٣٦ ؟

(٢) زاويتان متتامتان س ، ص قياس إحداهما يزيد عن قياس الأخرى بمقدار ٥٧° جد قياس كل من الزاويتين .

(٣) مجموع طول مستطيل وعرضه ٨٤ سم ويزيد الطول عن العرض بمقدار ١٨ سم . جد كل من طول المستطيل وعرضه .

(٤) عمر رجل مضافاً إليه ثلاثة أمثال عمر إبنه يعادل ٦٥ سنة فإذا كان الفرق بين عمريهما ٢٥ سنة . فما عمر كل منهما ؟

(٥) عددان صحيحان موجبان مجموعهما ٢٣ ، وضعف أكبرهما يزيد عن ثلاثة أمثال أصغرهما بمقدار ٦ . جد العددين .

(٦) حظيرة دواجن مستطيلة الشكل محيطها ٢٨ متراً فإذا نقص طولها ٣ أمتار ونقص عرضها مترين أصبح الطول ضعف العرض . جد مساحتها .

(٧) كسر إذا أضيف ٣ إلى مقامه يكون $\frac{١}{٢}$. وإذا أضيف ٢ إلى بسطه كان الناتج مساوياً ١ جد الكسر .

(٨) عدد مكون من رقمين قيمته تساوي ٧ أمثال مجموع رقمية . وإذا عكس وضع الرقمين يقل الناتج عن العدد الأصلي بمقدار ١٨ . فما العدد ؟

(٩) عمر والد يزيد عامين عن اربعة أمثال عمر ابنه . وبعد ٨ سنوات يصبح عمر الوالد ثلاثة أمثال عمر ابنه ناقصاً عامين . كم عمر كل منهما الآن ؟

(١٠) عدد مؤلف من رقمين مجموعهما ١١ لو عكسنا ترتيب رقمية لزاد العدد الناتج ٥ عن ثلاثة أمثال العدد الأصلي . ما العدد ؟

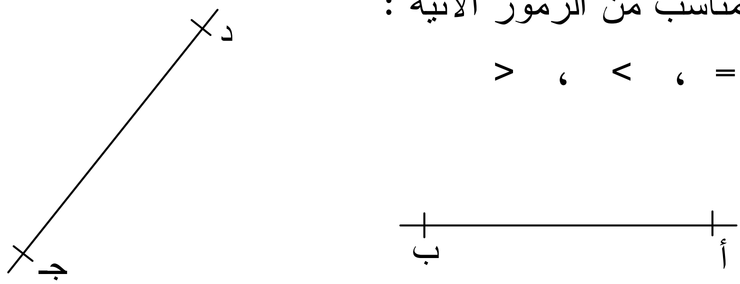
الوحدة السادسة

التباين

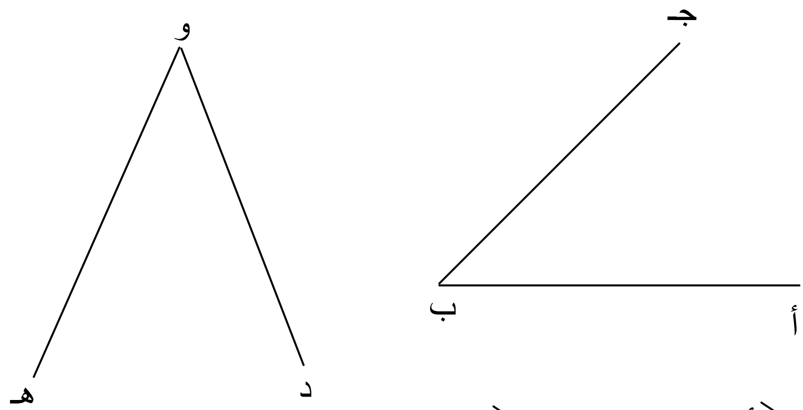
تمرين مراجعة

(١) بالقياس أكمل العبارات المرافقة للأشكال الآتية ، بوضع الرمز المناسب من الرموز الآتية :

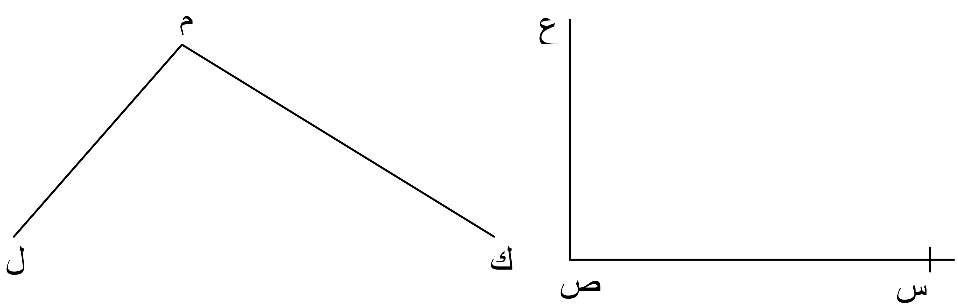
$=$ ، $<$ ، $>$



(أ) $\overline{\text{أب}}$ .... $\overline{\text{جـ د}}$



(ب) ∠أ ب جـ ...... ∠د و هـ

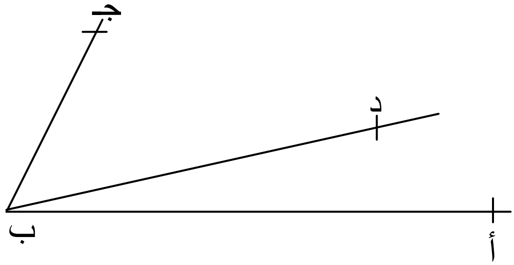


(جـ) ∠س ص ع ...... ∠ك م ل

(٢) بدون قياس أكمل العبارات المرافقة للأشكال الآتية :

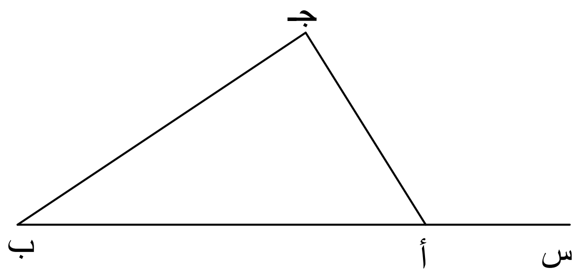
(أ) $\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{أ جـ}}$ + ...

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ...... $\overline{\text{أ جـ}}$



(ب) ∠أ ب جـ .... ∠أ ب د + ∠د ب جـ

∴ ∠د ب جـ .... ∠أ ب جـ



(جـ) ∠س أ جـ = ∠أ ب جـ + ∠................

∠س أ جـ .... ∠أ ب جـ

(٣) أرسم بدقة Δ أ ب جـ الذي فيه $\overline{\text{أ ب}}$ ٤ سم ، ∠ب = ٥٠° ،

∠ أ = ٦٠° ثم قس $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ∠ أ جـ ب رتب ترتيباً تنازلياً :

(أ) أضلاع المثلث (ب) زوايا المثلث (ج) ماذا تلاحظ ؟

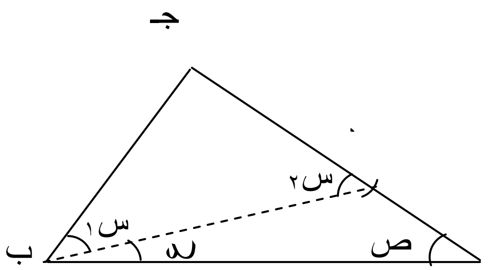
الدرس الأول : نظرية (١)

تمهيد :

لاحظت في مسائل تمرين المراجعة السابق أن المطلوب دائماً هي المقارنة بين طول قطعتين مستقيمتين أو قياسي زاويتين مختلفتين من حيث الكبر والصغر ، والتباين يعني الاختلاف في الطول أو المقدار أو غيره . وفي هذا الباب سنقتصر دراستنا على التباين في أضلاع المثلث وزواياه من خلال بعض النظريات .

نظرية (١) :

> **إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فإن الضلع الأكبر تقابله الزاوية الكبرى .**



المعطيات :

في Δ أ ب جـ ، $\overline{\text{أ جـ}} > \overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب إثباته :

$\angle$ أ ب جـ > $\angle$ ب أ جـ

العمل :

عيّن النقطة د على $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث $\overline{\text{جـ د}}$ = $\overline{\text{ب جـ}}$

البرهان :

في Δ د ب جـ

$\overline{\text{جـ د}}$ = $\overline{\text{ب جـ}}$ (بالعمل)

$\therefore$ س$_{٢}$ = س$_{١}$ (زاويتا قاعدة في Δ متساوي الساقين)

$\therefore$ س$_{٢}$ = ص + ع (زاوية خارجية للمثلث أ ب د)

$\therefore$ س$_{٢}$ > ص

$\therefore$ س$_{١}$ > ص

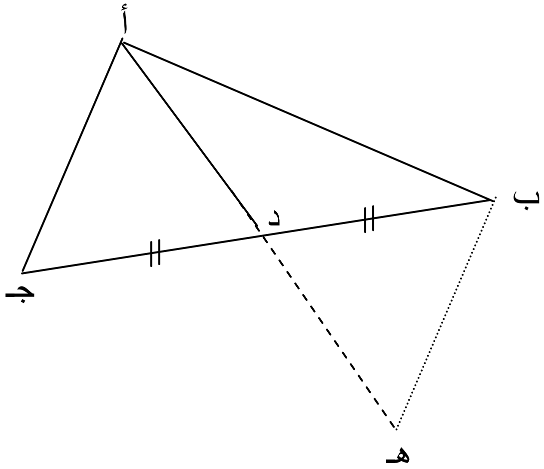
ولكن $\measuredangle$ أ ب جـ > س$_{١}$ (س$_{١}$ جزء من زاوية أ ب جـ)

$\therefore$ $\measuredangle$ أ ب جـ > ص

$\therefore$ $\measuredangle$ أ ب جـ > $\measuredangle$ ب أ جـ

مثال :

في Δ أ ب جـ ، د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ > $\overline{\text{أ جـ}}$. أثبت أن $\measuredangle$ب أ د < $\measuredangle$ د أ جـ



الحل :

المعطيات :

في Δ أ ب جـ ، أ ب > أ جـ ، ب د = د جـ

المطلوب إثباته :

∡ب أ د > ∡جـ أ د

العمل :

مد أ د إلى هـ حيث أ د = د هـ ، صل ب هـ .

البرهان :

في Δ ب هـ د ، Δ جـ أ د

ب د = جـ د (معطى)

هـ د = أ د (بالعمل)

∡ب د هـ = ∡جـ د أ (بالتقابل بالرأس)

∴ المثلثان متطابقان (ض ، ز ، ض)

∴ ∢ب هـ د = ∢جـ أ د (١)

$\overline{\text{ب هـ}}$ = $\overline{\text{جـ أ}}$ (٢)

$\overline{\text{أ ب}}$ > $\overline{\text{أ جـ}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ > $\overline{\text{ب هـ}}$

∴ في Δ أ ب هـ ، ∢ب هـ أ > ∢ب أ هـ

ولكن ∢ب هـ د = ∢جـ أ د

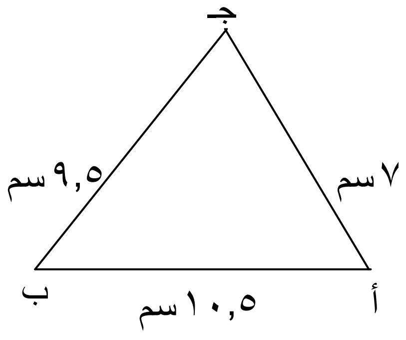
∴ ∢جـ أ د > ∢ب أ هـ

∴ ∢ب أ هـ < ∢جـ أ د

∴ ∢ب أ د < ∢جـ أ د

تمرين (٦–١)

(١) في الشكل (٦–١) رتب زوايا المثلث أ ب جـ ترتيباً تصاعدياً :



الشكل (٦–١)

(٢) أ ب جـ د متوازي الأضلاع فيه $\overline{\text{أ ب}}$ > $\overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن ∢أ جـ ب > ∢أ جـ د

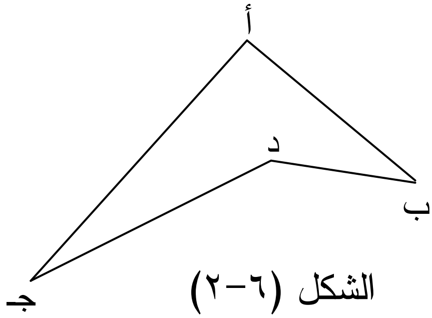
(٣) في الشكل (٦–٢) أ جـ > أ ب

∢أ ب د = ∢أ جـ د

أثبت أن :

∢جـ ب د > ∢ب جـ د

(إرشاد صل ب جـ)



الشكل (٦–٢)

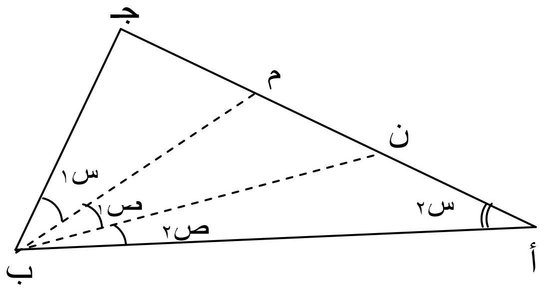
(٤) أ ب جـ د رباعي فيه أ ب > ب جـ > جـ د > د أ أثبت أن :

∢أ د جـ > ∢أ ب جـ

(إرشاد صل ب د)

الدرس الثاني : نظرية (٢) :

إذا اختلفت قيمتا زاويتين في مثلث فإن الزاوية الكبرى يقابلها الضلع الأكبر .



المعطيات :

∆ أ ب جـ الذي فيه ∢أ ب جـ > ∢ب أ جـ .

المطلوب إثباته :

أ جـ > جـ ب

العمل :

١- أرسم ب م ليقطع أ جـ في م ، حيث ∠م ب جـ = ∠ب أ جـ

٢- أرسم منصف ∠ أ ب م ليلاقي أ جـ في ن

البرهان :

∠جـ ب ن = س$_{١}$ + ص$_{١}$

∠جـ ن ب = س$_{٢}$ + ص$_{٢}$ (زاوية خارجية في △ أ ب ن)

ولكن س$_{١}$ = س$_{٢}$ ، ص$_{١}$ = ص$_{٢}$ (بالعمل)

∴ ∠جـ ب ن = ∠ جـ ن ب (وهما زاويتان في △ جـ ن ب)

∴ جـ ن = جـ ب

ولكن ن نقطة على أ جـ

∴ أ جـ > جـ ن

∴ أ جـ > جـ ب

نتيجة (١) :

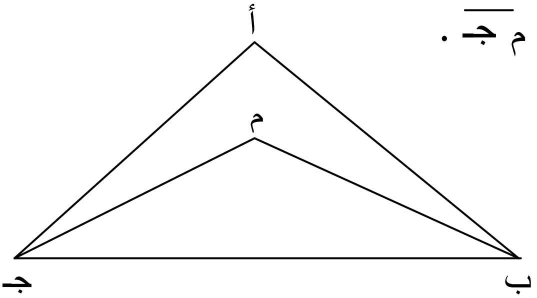
الضلع الذي يقابل الزاوية المنفرجة في المثلث المنفرج الزاوية هو أكبر أضلاع المثلث . لماذا ؟

نتيجة (٢) :

الوتر أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية .

مثال (١) :

في Δ أ ب جـ ، $\overline{\text{أ ب}}$ > $\overline{\text{أ جـ}}$ ، إذا كان منصفا الزاويتين ب ، جـ يلتقيان في م ، أثبت أن : $\overline{\text{م ب}}$ > $\overline{\text{م جـ}}$.



الشكل (٦-٣)

الحل :

في الشكل (٦–٣) :

المعطيات :

في Δ أ ب جـ ، $\overline{\text{أ ب}}$ > $\overline{\text{أ جـ}}$

$\overline{\text{ب م}}$ ينصف $\measuredangle$ أ ب جـ ، $\overline{\text{جـ م}}$ ينصف $\measuredangle$ ب جـ أ

المطلوب إثباته :

$\overline{\text{ب م}}$ > $\overline{\text{جـ م}}$

البرهان :

في Δ أ ب جـ :

$\overline{\text{أ ب}}$ > $\overline{\text{أ جـ}}$ **(معطى)**

$\therefore$ $\measuredangle$ أ جـ ب > $\measuredangle$ أ ب جـ **(نظرية)**

$\therefore$ $\frac{١}{٢}$ $\measuredangle$ أ جـ ب > $\frac{١}{٢}$ $\measuredangle$ أ ب جـ

ولكن $\measuredangle$ ب جـ م = $\frac{١}{٢}$ $\measuredangle$ أ جـ ب ،

$\measuredangle$ جـ ب م = $\frac{١}{٢}$ $\measuredangle$ أ ب جـ **(معطى)**

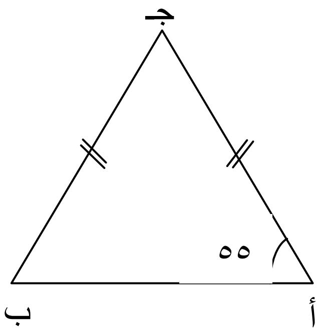
$\therefore$ في Δ ب جـ م :

$\measuredangle$ ب جـ م > $\measuredangle$ جـ ب م

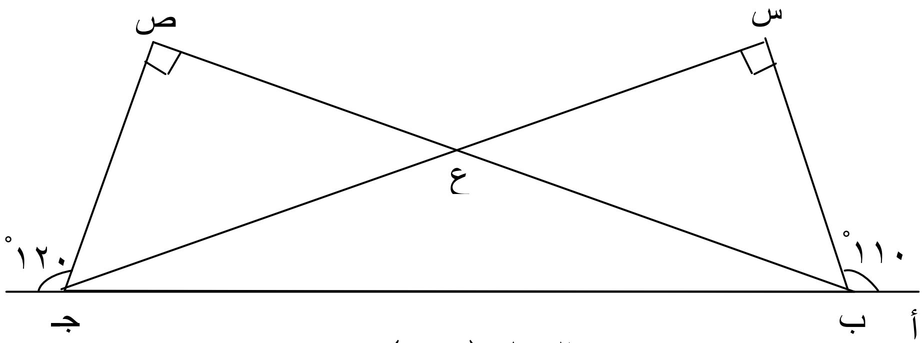
$\therefore$ $\overline{\text{ب م}}$ > $\overline{\text{جـ م}}$

تمرين (٦–٢)

(١)



الشكل (٦–٤)



الشكل (٦–٥)

في الشكل (٦–٤) أيهما أكبر : أ ب أم ب جـ ؟

في الشكل (٦–٥) أيهما أصغر جـ ع أم ب ع ؟

(٢) في ∆ أ ب جـ ، منصف زاوية أ يقطع ب جـ في د .

أثبت أن : أ ب > ب د .

(٣) أ ب جـ مثلث فيه أ جـ < أ ب ، د نقطة على أ ب ، هـ نقطة على أ جـ حيث د هـ // ب جـ

اثبت أن أ د > أ هـ

(٤) أ ب جـ د رباعي فيه ∠ ب = ∠ د ، أ ب > أ د

أثبت أن جـ د > ب جـ

(إرشاد صل ب د)

(٥) أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع ، س نقطة علـــى الــضلع ب جـ .

رتب أضلاع المثلث أ ب س ترتيباً تصاعدياً .

الدرس الثالث : نظرية (٣) :

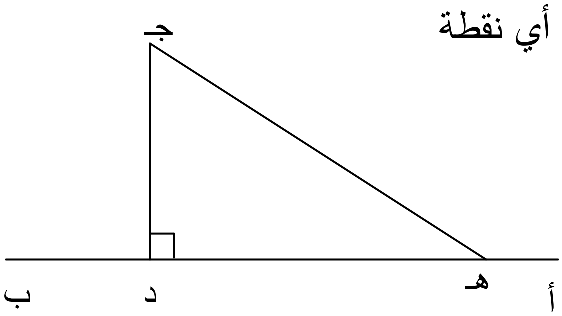
> **أقصر قطعة مستقيمة من نقطة معينة إلى مستقيم هو العمود النازل من النقطة على المستقيم .**

المعطيات :

المستقيم أ ب ، النقطة جـ خارج المستقيم

جـ د عمود على أ ب ، هـ أي نقطة

أخرى على أ ب خلاف د



المطلوب إثباته :

❖ جـ د < جـ هـ

البرهان : في Δ هـ د جـ

∠ هـ د جـ = ٩٠° **(معطى)**

∠ د هـ جـ + ∠ د جـ هـ = ٩٠° **(مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°)**

∴ ∠ د هـ جـ < ٩٠°

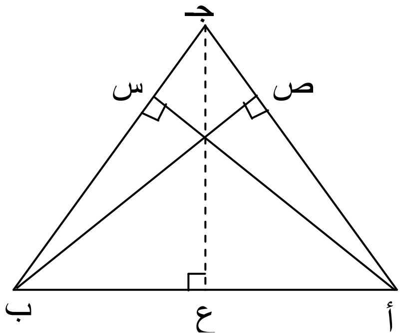
∴ ∠ د هـ جـ < ∠ هـ د جـ

∴ جـ د < جـ هـ

أي أن جـ د أقصر من أي مستقيم آخر من جـ إلى أ ب

مثال (١) :

أثبت أن مجموع ارتفاعات المثلث أقل من محيطه .



الحل :

المعطيات :

أ ب جـ مثلث ، $\overline{\text{أ س}}$ ،

$\overline{\text{ب ص}}$ ، $\overline{\text{جـ ع}}$ ارتفاعات المثلث .

المطلوب إثباته :

$\overline{\text{أ س}}$ + $\overline{\text{ب ص}}$ + $\overline{\text{جـ ع}}$ < $\overline{\text{أ ب}}$ + $\overline{\text{ب جـ}}$ + $\overline{\text{جـ أ}}$

البرهان :

في Δ أ ب س ، $\overline{\text{أ س}}$ < $\overline{\text{أ ب}}$ (∡ أ س ب قائمة) . (١)

في Δ ب جـ ص ، $\overline{\text{ب ص}}$ < $\overline{\text{ب جـ}}$ (∡ ب ص جـ قائمة) (٢)

في Δ أ ع جـ ، $\overline{\text{جـ ع}}$ < $\overline{\text{أ جـ}}$ (∡ أ ع جـ قائمة) (٣)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) نحصل على :

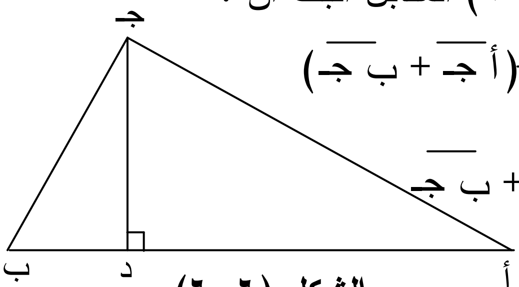
$\overline{\text{أ س}}$ + $\overline{\text{ب ص}}$ + $\overline{\text{جـ ع}}$ < $\overline{\text{أ ب}}$ + $\overline{\text{ب جـ}}$ + $\overline{\text{جـ أ}}$

تمرين (٦–٣)

(١) في الشكل (٦–٦) المقابل أثبت أن :

(أ) $\overline{\text{جـ د}}$ < $\frac{1}{2}$ ($\overline{\text{أ جـ}}$ + $\overline{\text{ب جـ}}$)

(ب) $\overline{\text{أ ب}}$ < $\overline{\text{أ جـ}}$ + $\overline{\text{ب جـ}}$

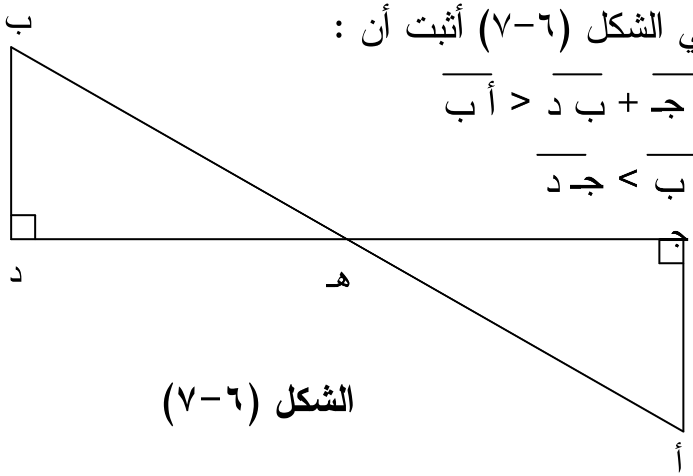


الشكل (٦–٦)

(٢) في الشكل (٦–٧) أثبت أن :

(أ) أ جـ + ب د < أ ب

(ب) أ ب > جـ د



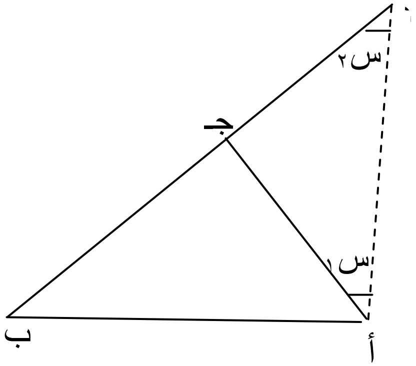
الشكل (٦–٧)

(٣) أ ب جـ ∆ قائم الزاوية في أ ، د نقطة على ب جـ حيــث ∢ب أ د = ∢أ جـ د أثبت أن :

أ د هو أقصر القطع المستقيمة المرسومة من أ على ب جـ

الدرس الرابع : نظرية (٤) :

في أي مثلث مجموع أي ضلعين أكبر من الضلع الثالث .



المعطيات :

∆ أ ب جـ

المطلوب إثباته :

أ جـ + جـ ب > أ ب

العمل :

مد ب جـ إلى د حيث جـ د = أ جـ

صل أ د .

البرهان :

في Δ أ جـ د ، أ جـ = جـ د (بالعمل)

∴ س$_{١}$ = س$_{٢}$ (زاويتا قاعدة في Δ متساوي الساقين)

وبما أن : ∠ب أ د > س$_{١}$

∴ ∠ب أ د > س$_{٢}$

في Δ أ ب د :

∠ب أ د > ∠أ د ب

∴ ب د > أ ب

ولكن ب د = د جـ + جـ ب

= أ جـ + جـ ب

∴ أ جـ + جـ ب > أ ب

وبالمثل يمكن إثبات أن :

أ ب + ب جـ > أ جـ

أ ب + أ جـ > ب جـ

نتيجة :

في أي مثلث طول أي ضلع أكبر من الفرق بين طــولي الضلعين الآخرين ، أي :

أ جـ > أ ب – جـ ب ،

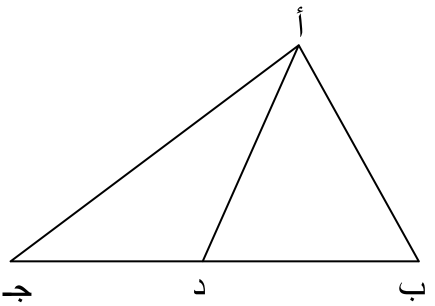
أ ب > أ جـ – ب جـ ،

ب جـ > أ جـ – أ ب وهكذا .

مثال (١) :

في ∆ أ ب جـ ، د نقطة على ب جـ ، أثبت أن :

أ د < $\frac{١}{٢}$ (أ ب + ب جـ + جـ أ)



الحل :

المعطيات :

∆ أ ب جـ ، د نقطة على ب جـ

المطلوب إثباته :

أ د < $\frac{١}{٢}$ (أ ب + ب جـ + جـ أ)

البرهان :

في ∆ أ ب د :

أ ب + ب د > أ د (نظرية) .... (١)

في ∆ أ د جـ :

د جـ + جـ أ > أ د (نظرية) .... (٢)

بجمع (١) و (٢) :

أ ب + ب د + د جـ + جـ أ > أ د + أ د

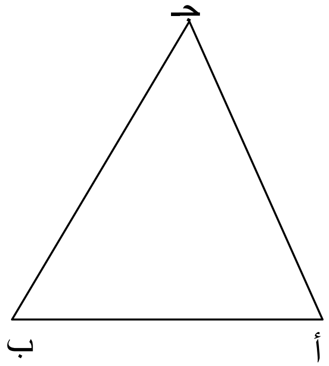
∴ أ ب + ب جـ + جـ أ > ٢ أ د

∴ ١/٢ (أ ب + ب جـ + جـ أ) > أ د

∴ أ د < ١/٢ (أ ب + ب جـ + جـ د)

مثال (٢) :

أثبت أن أي ضلع في المثلث أصغر من نصف محيطه .



الحل :

المعطى :

Δ أ ب جـ

المطلوب إثباته :

أ جـ < ١/٢ (أ ب + ب جـ + جـ أ)

البرهان :

في Δ أ ب جـ :

أ ب + ب جـ > أ جـ

أضف أ جـ إلى كل من الطرفين .

أ ب + ب جـ + أ جـ > أ جـ + أ جـ

∴ أ ب + ب جـ + أ جـ > ٢ أ جـ

١/٢ (أ ب + ب جـ + أ جـ) > أ جـ

∴ أ جـ < ١/٢ (أ ب + ب جـ + أ جـ)

تمرين (٦– ٤)

(١) هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه :

١– ٢,٥ سم ، ٣,٥ سم ، ٦,٥ سم ؟

٢– ٢ بوصة ، ٣ بوصة ، ٤ بوصة ؟

٣– ٢ سم ، ٦ سم ، ٣ سم ؟

(٢) أثبت أن نصف محيط أي شكل رباعي أكبر من أي من قطريه .

(٣) د نقطة داخل المثلث أ ب جـ ، أثبت أن :

٢ (أ د + ب د + جـ د) > أ ب + ب جـ + جـ أ

(٤) س ص ع مثلث فيه س ص = س ع ، مد س ص إلى د ومد س ع إلى هـ ، ثم صل د هـ . أثبت أن :

ص د < د هـ + هـ ع

(٥) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ٧ سم ، فإذا كان طول أ جـ عدداً صحيحاً ، أكتب مجموعة الأعداد التي يمكن أن يكون كل عنصر فيها طولاً للضلع أ جـ .

الوحدة السابعة
ضرب وتحليل المقادير الجبرية

تمرين مراجعة

(أ) مستعملاً الخاصية التوزيعية أجر العمليات الآتية :

(١) ٤(س – ١) (٢) ٣(٢س + ٥)

(٣) س(٣ – ص) (٤) س(٢ + س)

(٥) ٢ص(٥ + ٣س) (٦) (س – ص)ص

(٧) ٢(أ + ب + جـ) + ٣(أ – ب + جـ)

(٨) ٥ص(٢ + ٣س – ٥ص^{٢}) + ص(٥ – ٣ص + ٤س ص)

(ب) مستعملاً الخاصية التوزيعية أملأ المستطيلات من ٩ إلى ١٣ :

(٩) ٧س + ٧ص = □(□ + ص)

(١٠) س – س ص = س (□ – □)

(١١) ص^{٣} + ٦س ص = □ (□ + ٦س)

(١٢) ٢س ص – ٦س^{٢}ص^{٢} = □ □ □(□ – ٣س ص)

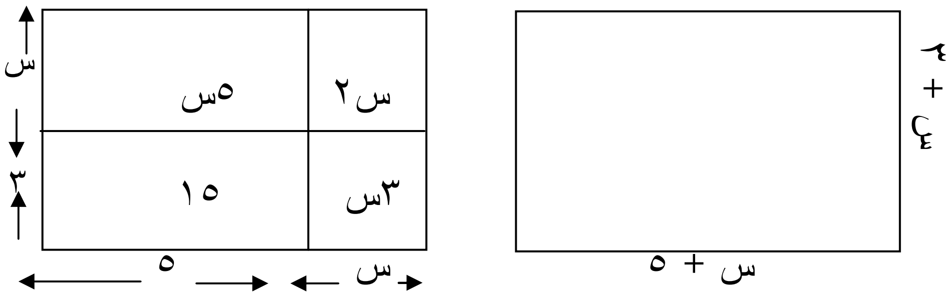
(١٣) ٥ أ^{٢} + ٢٠ب^{٢} – ١٠أ^{٢} = □(□ + □ – □)

(١٤) جد مساحة مستطيل طوله (٢س + ص)سم ، عرضه ص سم .

(١٥) جد مساحة مستطيل طوله (س^{٢} + ٥)سم ، وعرضه (٣س)سم .

الدرس الأول : ضرب المقادير الجبرية :

مساحة مستطيل طوله (س + ٥) وحدة طولية وعرضه (س + ٣) وحدة طولية = (س + ٥) (س + ٣) وحدة مربعة .



يمكن تقسيم المستطيل إلى أربعة أجزاء :

الجزء الأول مربع ومساحته = س × س = س^{٢} وحدة مربعة .

الجزء الثاني مستطيل ومساحته = ٣ × س = ٣س وحدة مربعة .

الجزء الثالث مستطيل ومساحته = ٥ × س = ٥س وحدة مربعة .

الجزء الرابع مستطيل ومساحته = ٥ × ٣ = ١٥ وحدة مربعة .

فيكون :

(س + ٥) × (س + ٣) = س^{٢} + ٣س + ٥س + ١٥

أي (س + ٥) (س + ٣) = س^{٢} + ٨س + ١٥

ويمكن الحصول على النتيجة نفسها باستخدام خاصية التوزيع كالآتي :

(س + ٥) (س + ٣) = س(س + ٣) + ٥(س + ٣)

= س^{٢} + ٣س + ٥س + ١٥

= س^{٢} + ٨س + ١٥

بوجه عام :

(أ + ب) (جـ + د) = أ (جـ + د) + ب(جـ + د)

= أ جـ + أ د + ب جـ + ب د

(أ – ب) (جـ + د) = أ (جـ + د) – ب(جـ + د)

= أ جـ + أ د – ب جـ – ب د

(أ + ب) (جـ – د) = أ (جـ – د) + ب (جـ – د)

= أ جـ – أ د + ب جـ – ب د

(أ – ب) (جـ – د) = أ (جـ – د) – ب (جـ – د)

= أ جـ – أ د – ب جـ + ب د

أمثلة :

(١) (جـ + ٥) (د + ٢) = جـ (د + ٢) + ٥(د + ٢)

= جـ د + ٢جـ + ٥د + ١٠

(٢) (س – ٥) (ص – ٢) = س (ص – ٢) – ٥(ص – ٢)

= س ص – ٢س – ٥ ص + ١٠

(٣) (ص – ٥) (ص + ٣) = ص (ص + ٣) – ٥(ص + ٣)

= ص^{٢} + ٣ص – ٥ص – ١٥

= ص^{٢} – ٢ص – ١٥

(٤) (س – ٢) (س – ٧) = س(س – ٧) – ٢(س – ٧)

= س^{٢} – ٧س – ٢س + ١٤

= س^{٢} – ٩س + ١٤

(٥) (٢س + ٥)^{٢} = (٢س + ٥) (٢س + ٥)

= ٤س^{٢} + ١٠س + ١٠س + ٢٥

= ٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥

مثال :

أضرب :

(١)   (س + ٥) (س + ٤)

(٢)   (ص − ٣) (ص + ١)

الحل :

بقليل من التركيز يمكن إلغاء الخطوة الأولى في حل المثال السابق بضرب أي حد من القوس الأول في جميع حدود القوس الثاني وهكذا .

(١) (س + ٥) (س + ٤) = س^{٢} + ٤س + ٥س + ٢٠

= س^{٢} + ٩س + ٢٠

(٢) (ص − ٣) (ص + ١) = ص٢ + ص − ٣ص − ٣

= ص^{٢} − ٢ص − ٣

تمرين (٧−١)

جد ناتج الضرب في كل ما يأتي :

(١) (ب + جـ) (ص + هـ)

(٢) (أ − د) (س − هـ)

(٣) (أ + د) (أ + ٣)

(٤) (ب + ٤) (ب − أ)

(٥) (س + ١) (س + ٢)

(٦) (س − ١) (س + ٢)

(٧) (س − ١) (س − ٢)

(٨) (س + ٢) (س − ٤)

(٩) (٢س + ٣ص) (٣س + ٢ص)

(١٠) (٥س − ٢أ) (٣س + ٢أ)

الدرس الثاني : تابع ضرب المقادير الجبرية :

بالطريقة التي عرفناها في الدرس السابق وهي ضرب أي حد من حدود القوس الأول في جميع حدود القوس الثاني مهما كان عدد الحدود في كل من القوسين يمكن ضرب المقادير الجبرية بصورة عامة كما يتضح في المثال التالي :

مثال :

جد ناتج الضرب في كل مما يأتي :

(١) (س + ص) (أ + ب + جـ)

(٢) (س – ص + هـ) (أ + ب – جـ)

(٣) (س^{٢} + ٢س – ١) (س^{٣} + س^{٢} – ٣س + ٢)

الحل :

(١) (س + ص) (أ + ب + جـ) =

س أ + س ب + س جـ + ص أ + ص ب + ص جـ

(٢) (س – ص + هـ) (أ + ب – جـ) =

س أ + س ب – س جـ – ص أ – ص ب + ص جـ + هـ أ + هـ ب – هـ جـ

(٣) (س^{٢} + ٢س – ١) (س^{٣} + س^{٢} – ٣س + ٢) =

س^{٥} + س^{٤} – ٣س^{٣} + ٢س^{٢} + ٢س^{٤} + ٢س^{٣} – ٦س^{٢} + ٤س – س^{٣} – س^{٢} + ٣س – ٢ =

س^{٥} + ٣س^{٤} –٢س^{٣} – ٥س^{٢} + ٧س – ٢

تمرين (٧–٢)

جد ناتج الضرب في كل مما يأتي :

(١) (أ + ب) (س + ص + أ)

(٢) (س + ص – ٣) (٢س + ٣ص – ٥)

(٣) (٣ + ٤س^{٣}) (٥ – س – س^{٢} + ٣س^{٣})

(٤) (س^{٢} – ص^{٢}) (س ص – ٢س^{٢}ص + ٣س ص^{٢})

(٥) (٢س^{٢} – ٧س + ٣) (س^{٤} – ٥س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣)

(٦) (أ^{٢}ب + ٣أ^{٣} – ٤أ^{٥}) (٣أ – ٤أ^{٢}ب^{٢} – ٥أ^{٣}ب^{٣})

(٧) (س + ٣) (س^{٢} + ٢س – ١) (س^{٢} – ١)

الدرس الثالث : تحليل المقدار الجبري وعوامله :

نعلم أن ٣٠ = ٥ × ٦ ويعني هذا أن العدد ٣٠ يقبل القسمة على ٥ ويقبل القسمة على ٦ بدون باقٍ .

أذكر مجموعة الأعداد الصحيحة التي تقسم العدد ١٢ . هذه المجموعة من الأعداد الصحيحة التي ذكرتها ، عناصرها تسمى مجموعة عوامل العدد ١٢ . فالعدد ١ عامل من عوامل العدد ١٢ لأن ١ × ١٢ = ١٢ ، ونكون قد حللنا العدد ١٢ إلى عاملين هما ١ ، ١٢ .

والعدد ٢ عامل من عوامل العدد ١٢ لأن ٢ × ٦ = ١٢

ونكون قد حللنا العدد ١٢ إلى عاملين هما ٢ ، ٦

والعدد ٣ عامل من عوامل العدد ١٢ لأن ٣ × ٤ = ١٢

ونكون قد حللنا العدد ١٢ إلى عاملين هما : ٣ ، ٤

والعدد ٤ عامل ممن عوامل العدد ١٢ لأن ٤ × ٣ = ١٢

ونكون قد حللنا العدد ١٢ إلى عاملين هما ٤ ، ٣

إن مفهوم تحليل المقادير الجبرية هو نفس مفهوم تحليل الأعداد الصحيحة .

فنقول إن س عامل من عوامل المقدار الجبري :

س^{٢} + ٣س لأن س (س + ٣) = س^{٢} + ٣س

ونكون قد حللنا المقدار الجبري س^{٢} + ٣س إلى عاملين هما س ، س + ٣ .

وإن ص عامل من عوامل المقدار الجبري ص^{٢} + س ص لأن ص(ص + س) = ص^{٢} + س ص .

هل س عامل من عوامل المقدار س ص + س ع ؟ لماذا ؟

هل المقدار الجبري (س + ص) عامل من عوامل المقدار الجبري س^{٢} + س ص^{٢} ؟ ولماذا ؟

نعني بتحليل مقدار جبري بأن نضع هذا المقدار الجبري في صورة عوامل مضروبة في بعضها بشرط أن يكون معامل كل متغير عدداً صحيحاً .

المقدار الجبري س + ص لا يحلل لأن هذا أبسط صورة له .

والمقدار الجبري ٣س + ٦ الذي معامله الحسابي عدد صحيح يكون محللاً تحليلاً كاملاً إذا كتب على الصورة ٣(س + ٢)

لأن المقدار س + ٢ لا يمكن تحليله ولكن ٣س^{٢} + ٦ إذا كتب بالصورة :

٦ ($\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ١) لا يكون محللاً تحليلاً كاملاً لأن معامل س^{٢} ليس عدداً صحيحاً .

تدريب :

بين ما إذا كان المقدار الجبري التالي محللاً تحليلاً كاملاً أ م لا في كل حالة مما يأتي :

(١) ٢س^{٢} + ٤س = ٢س (س + ٢)

(٢) ٢س^{٢} + ٤س = ٢(س^{٢} + ٢س)

(٣) ٢س^{٢} + ٤س = ٤س ($\frac{١}{٢}$س + ١)

الدرس الرابع : التحليل باستخراج العامل المشترك :

مثال (١) :

حلل المقدار الجبري الآتي تحليلاً كاملاً :

٣أب + ٦أجـ

الحل :

٣أب + ٦أجـ = ٣(أ ب + ٢ أ جـ)

= ٣ أ (ب + ٢ جـ)

ونكون قد حللنا المقدار إلى ثلاثة عوامل هي :

٣ ، أ ، (ب + ٢جـ)

هذا النوع من التحليل يسمى التحليل **باستخراج العامل المشترك** ،
إذا أن ٣ عامل مشترك بين ٣ أ ب ، ٦ أ جـ وأن أ أيضاً عامل مشترك بين ٣ أ ب ، ٦ أ جـ .

مثال (١) :

حلل الآتي تحليلاً كاملاً :

٥ أ^{٢}هـ + ١٠ أ هـ^{٢}د – ١٥ أ^{٣}هـ^{٣}د^{٢}

الحل :

٥ أ^{٢}هـ + ١٠ أ هـ^{٢}د – ١٥ أ^{٣}هـ^{٣}د^{٢} = ٥ أ هـ (أ + ٢ هـ د – ٣ أ^{٢} هـ^{٢}د^{٢})

ونكون قد حللنا المقدار إلى ٤ عوامل هي :

٥ ، أ ، هـ ، (أ + ٢ هـ د – ٣ أ^{٢}هـ^{٢}د^{٢})

تمرين (٧–٣)

(١) إذا طلب منك تحليل المقدار الجبري ٤ هـ^{٢} + ١٢ هـ س + ٦ هـ بين أي الصور الآتية تحليل كامل وأيهما تحليل غير كامل ؟ ولماذا ؟

أ– ٤ هـ (هـ + ٣س) + ٦ هـ

ب– ٤ هـ^{٢} + ٦ هـ (٢س + ١)

ج– ٢(٢ هـ^{٢} + ٦ هـ س + ٣ هـ)

د– ٢ هـ (٢ هـ + ٦س + ٣)

هـ ٦ هـ ($\frac{١}{٢}$ هـ + ٢س + ١)

(٢) حلل المقادير الجبرية الآتية وبين عدد العوامل في كل حالة :

(١) ٣د –٣ (٢) (هـ – هـ م) (٣) ص^{٢} – ٨ص

(٤) أ^{٣} + ٦أب (٥) ٤س^{٢} + ١٢س (٦) س^{٢}م^{٢} + س^{٣}

(٧) ٤أب^{٢} – ٤ب – ٢ (٨) ص – س ص هـ + ص^{٢}

(٩) أ^{٢}ن + أ^{٤}س + أ^{٣}ل (١٠) س د + س^{٢}د – س^{٣}د^{٢}

(١١) ٦أب – ٢ب^{٢} + ٦ب س (١٢) ٨د^{٢} – ٢د^{٢}ن^{٢} + ٤د^{٣}م^{٤}

الدرس الخامس : العلاقة بين المقدار الجبري (س – ص) والمقدار الجبري(ص – س) :

النظير الجمعي للمقدار الجبري (س –ص) هو – (س – ص) :

عليه يكون :

(س – ص) + [–(س – ص)] = ٠

لكن : (س – ص) + (ص – س) = ٠

∴ (س – ص) = –(ص – س)

أمثلة :

(١) ٩ – ٥ = –(٥ – ٩)

(٢) (س – ٣) = –(٣ – س)

(٣) (٧ – هـ) = –(هـ – ٧)

تمرين (٧− ٤)

(شفهي)

أكمل الآتي :

(١) (س − ١) = − (□ − □)

(٢) هـ − د = − (□ □ □)

(٣) □ − □ = − (ل − م)

(٤) ص − □ = □ (٧ □ □)

(٥) □ − هـ = − (□ □ ٩)

الدرس السادس : تابع التحليل باستخراج العامل المشترك :

مثال : حلل المقادير الآتية :

(١) ٢(س + ١) + ص (س + ١)

(٢) ٣ (ص + ٢) + هـ (٢ + ص)

(٣) أ (س − ص) + (ص − س)

(٤) (ص + ٢) + (ص + ٢) (هـ + ٣)

الحل :

(١) ٢(س + ١) + ص (س + ١) = (س + ١) (٢ + ص) لأن العامل س + ١مشترك بين الحدين .

(٢) ٣ (ص + ٢) + هـ (٢ + ص)

= (ص + ٢) (٣ + هـ) لأن ص + ٢ = ٢ + ص وهو عامل مشترك .

(٣) أ (س – ص) + (ص – س)

= أ (س – ص) + [– (س – ص)]

= أ (س – ص) – (س –ص)

= (س – ص) (أ –١)

(٤) (ص + ٢) + (ص + ٢) (هـ + ٣)

= (ص + ٢) (١ + هـ + ٣)

= (ص + ٢) (هـ + ٤)

تمرين (٧–٥)

حلل الآتي :

(١) ص(س + ٥) + ٣(س + ٥)

(٢) ٦ (٢ + ص) – س(ص + ٢)

(٣) أ (٣ – هـ) + ٢(هـ – ٣)

(٤) ٧ (س – ٣) – أ(٣ – س)

(٥) ٢ (س – ص) + هـ (ص – س)

(٦) ٦ (س – ص) + ٢هـ (س – ص)

(٧) (س – ٣) – ص (٣ – س)

(٨) هـ (أ – ب) + (ب – أ)

الدرس السابع : التحليل بواسطة التجميع :

أفرض أنه طلب منا تحليل المقدار الآتي تحليلاً تحليلاً كاملاً :

أ س – أ ص + ب س – ب ص

* هل يوجد عامل مشترك بين حدود هذا المقدار الجبري ؟

* هل يوجد عامل مشترك بين حدي المقدار الجبري أ س – أ ص ؟ ما هو ؟

* هل يوجد عامل مشترك بن حدي المقدار الجبري ب س – ب ص ؟ ما هو ؟

∴ (أ س – أ ص) + (ب س – ب ص) =

أ (س – ص) + ب (س – ص) =

(س – ص) (أ + ب)

هذا النوع من التحليل يسمى التحليل بواسطة **التجميع** .

هل هنـــاك تجميع آخر لتحليل المقدار الجبري أ س – أ ص + ب س – ب ص ؟ ما هو ؟

مثال (١) :

حلل ٢ أ – ٢س + ب أ – ب س

الحل :

٢ أ – ٢س + ب أ – ب س = (٢ أ – ٢س) + (ب أ – ب س)

= ٢ (أ – س) + ب (أ – س)

= (أ – س) (٢ + ب)

مثال (٢) :

حلل :

٦س^{٢} – ٩ أ س – ٤ ب س + ٦ أ ب

الحل :

٦س^{٢} – ٩ أ س – ٤ ب س + ٦ أ ب

= (٦س^{٢} – ٩ أ س) – (٤ ب س – ٦ أ ب)

= ٣س (٢س – ٣أ) – ٢ب(٢س – ٣أ)

= (٢س – ٣أ) (٣س – ٢ب)

لاحظ في الخطوة الثانية عند استخراج الرمز (–) خارج القوس كتب الحد +٦أب في الصورة – ٦أب ، لماذا ؟

مثال (٣) :

حلل : أ جـ – جـ د + أ – د

الحل :

أ جـ – جـ د + أ – د = (أ جـ – جـ د) + (أ – د)

= جـ (أ – د) + (أ – د)

= (أ – د) (جـ + ١)

مثال (٤) :

حلل : أ جـ – ب د – ب جـ + أ د

الحل :

أ جـ – ب د – ب جـ + أ د =

(أ جـ + أ د) – (ب د + ب جـ) =

أ (جـ + د) – ب (د + جـ) =

(جـ + د) (أ – ب)

مثال (٥) :

حلل : أ س – أ ص + هـ ص – هـ س

الحل :

أ س – أ ص + هـ ص – هـ س

(أ س – أ ص) + (هـ ص – هـ س) =

أ (س – ص) + هـ (ص – س) =

أ (س – ص) – هـ (س – ص) =

(س – ص) (أ – هـ)

تمرين (٧–٦)

حلل المقادير الجبرية الآتية تحليلاً كاملاً :

(١) أ^{٢} + أ ب + أ جـ + ب جـ

(٢) س^{٢} + س ص + ٣س + ٣ص

(٣) أ^{٢} + أ جـ – ٥ أ – ٥ جـ

(٤) أ س + ب ص + ب س + أ ص

(٥) أ^{٢} جـ^{٢} + أ^{٢} د^{٢} + ب^{٢} د^{٢} + ب^{٢} جـ^{٢}

(٦) أ ب – ١٢س ص + ٣ ب س – ٤ أ ص

(٧) ٢(س – ص) – هـ (ص – س)

(٨) ٧م – ص م + ن ص – ٧ن

(٩) أ س – أ^{٢} + أ د – س د

(١٠) ٢ أ – ٢ب + ٦ن ب – ٦ن أ

(١١) أ^{٢} + ٢ب – أ ب – ٢ أ

الدرس الثامن : المقدار الجبري من الدرجة الثانية :

بالنظر إلى المقادير الجبرية :

(١) س + ٣ (٢) ٣ص^{٢} + ٢ص + ١

(٣) ٤س^{٣} + س^{٢} + ٢س – ٣

(٤) أ ص^{ن} + ب ص$^{ن - ١}$ + جـ ص$^{ن - ٢}$ + ... + هـ (أ $\neq$ ٠)

(ن $\in$ ط)

نلاحظ أن كلا منها يحتوي على متغير واحد هو س أو ص ، في المقدار الأول نجد أ ن أكبر أس للمتغير س هو ١ ونقول أنه مقدار جبري من الدرجة الأولى ، وفي الثاني نجد أن أكبر أس للمتغير ص هو (٢) لذلك فهو مقدار جبري من الدرجة الثانية ، وفي الثالث نجد أن أكبر أس للمتغير س هو (٣) لذلك فهو مقدار جبري من الدرجة الثالثة ، وفي الرابع نجد أن أكبر أس للمتغير ص هو ن لذلك فهو مقدار جبري من الدرجة ن نخلص إلى أن درجة المقادير الجبرية ذات المتغير الواحد تسمى **بأعلى أس** لذلك المتغير .

المقدار الجبري (٩س^{٢} + ٣س + ٥) مقدار جبري من الدرجة الثانية ، لاحظ أن معامل س^{٢} هو العدد ٩ ، ومعامل س هو العدد ٣ ونقول أن العدد ٥ هو الحد المطلق أو الحد الثابت أو الحد الخالي من س .

تمرين (٧–٧) شفهي

أذكر درجة كل من المقادير الجبرية الآتية ، ثم معامل س^{٢} ، ومعامل س ، والحد المطلق في كل من :

(١) س^{٢} – ٧س – ٢   (٢) ٣س^{٢} + ٢س – ١

(٣) س^{٣} – ٧س^{٢} – س   (٤) س – ٢س^{٢}

(٥) س^{٢} – ٢   (٦) س^{٢} + (م+ن)س + م ن

(٧) س^{٢} – (م+ن)س – م ن

الدرس التاسع : تحليل المقدار الجبري من الدرجة الثانية إذا كان معامل س^{٢} الواحد الصحيح :

تمهيد :

في مفكوك :

(س + ٢) (س + ٣) = س^{٢} + ٣س + ٢س + ٢ × ٣

= س^{٢} + ٥س + ٦

لاحظ أ ن ٥س هو حاصل جمع ٣س و ٢س

∴ س^{٢} + ٥س + ٦ = (س + ٢) (س + ٣)

ونكون قد حللنا مقدار الدرجة الثانية

س^{٢} + ٥س + ٦ إلى عاملين هما (س + ٢) ، (س + ٣) . كم يساوي معامل س^{٢} ؟

س

أيضاً (س + ٤) (س + ١) = س^{٢} + ٥س + ٤

٤س

عليه يكون المقدار س^{٢} + ٥س + ٤ هو :

(س + ٤) (س + ١)

كذلك :

٢س

(٢ – س) (٣ + س) = ٦ – س – س^{٢}

–٣س

فإن :

(٢ – س) (٣ + س) يحلل (٦ – س – س٢) إلى عاملين هما (٢ – س) ، (٣ + س)

الآن :

إذا كان م ، ن $\in$ **ص** فإن :

(س + م) (س + ن) = س^{٢} + م س + ن س + م ن

س^{٢} + (م + ن) س + م ن

عليه فإن المقدار :

س^{٢} + (م + ن) س + م ن يحلل إلى عاملين هما (س + م) ، (س + ن)

ما علاقة هذين العاملين بالمقدار الجبري :

س^{٢} + (م + ن) س + م ن ؟

نلاحظ أن معامل س = م + ن وأن الحد المطلق = م × ن

لذلك إذا أردنا أن نحلل المقدار الجبري س^{٢} + ٧س + ١٢ نبحث عن عاملين حاصل ضربهما ١٢ ومجموعهما ٧ أي نحلل الحد المطلق إلى عاملين مجموعهما يساوي معامل س .

س^{٢} + ٧س + ١٢ = (س   ) (س   )

∴ الحد المطلق = ١٢

= ١ × ١٢

= $^{-}$١ + × $^{-}$١٢

= ٢ × ٦

= $^{-}$٢ × $^{-}$٦

= ٣ × ٤

= $^{-}$٣ × $^{-}$٤

ثم نبحث عن العاملين الذين يكون مجموعهما ٧ فنجد أنهما ٣ ، ٤ فيكون :

س^{٢} + ٧س + ١٢ = (س + ٣) (س + ٤)

مثال (١) :

حلل س^{٢} + ١٠س + ٢٤

نبحث عن عاملين حاصل ضربهما ٢٤ وجمعهما ١٠ .

الحد المطلق = ٢٤

= ١ × ٢٤

= ١¯ × ٢٤¯

= ٢ × ١٢

= ٢¯ × ١٢¯

= ٣ × ٨

= ٣¯ × ٨¯

= ٤ × ٦

= ٤¯ × ٦¯

ما العاملان اللذان مجموعهما ١٠ ؟

∴ س٢ + ١٠س + ٢٤ = (س + ٤) (س + ٦)

مثال (٢) :

حلل س^{٢} + ٧س – ١٨

الحل :

نبحث عن عاملين مجموعهما ٧ وحاصل ضربهما ١٨¯

١٨¯ = ١¯ × ١٨

= ١ × ١٨¯

= ٩¯ × ٢

= ٢¯ × ٩

= ٣¯ × ٦

= ٣ × ٦¯

خذ العاملين اللذين مجموعهما ٧ ؟

∴ س^{٢} + ٧س − ١٨ = (س + ٩) (س − ٢)

مثال (٣) :

حلل س^{٢} − ٥س − ٣٦

الحل :

لنبحث عن عاملين مجموعهما ٥$^{-}$ وحاصل ضربهما ٣٦$^{-}$

٣٦$^{-}$ = ١$^{-}$ × ٣٦

= ١ × ٣٦$^{-}$

= ٢$^{-}$ × ١٨

= ٢ × ١٨$^{-}$

= ٣$^{-}$ × ١٢

= ٣ × ١٢$^{-}$

= ٤$^{-}$ × ٩

= ٤ × ٩$^{-}$

= ٦$^{-}$ × ٦

نجد أن العاملين هما ٤ ، ٩$^{-}$

∴ س^{٢} − ٥س − ٣٦ = (س + ٤) (س − ٩)

مثال (٤) :

حلل س^{٢} − ١١س + ٣٠

لنبحث عن عاملين مجموعهما ١١$^{-}$ وحاصل ضربهما ٣٠

٣٠ = ١ × ٣٠

= ¯١ × ¯٣٠

= ٢ × ١٥

= ¯٢ × ¯١٥

= ٣ × ١٠

= ¯٣ × ¯١٠

= ٥ × ٦

= ¯٥ × ¯٦

ما العاملان اللذان مجموعهما ¯١١ ؟

س^{٢} – ١١س + ٣٠ = (س–٥) (س–٦)

وبعد مزيد من التدريب يمكن أيجاد العاملين عقلياً كما هو موضح بالأمثلة الآتية :

مثال (٥) :

حلل س^{٢} + ١١س + ٢٤

الحل :

العددان اللذان حاصل ضربهما ٢٤ ومجموعهما ١١ هما ٨ ، ٣

∴ س^{٢} + ١١س + ٢٤ = (س + ٨) (س + ٣)

التحقيق :

(س + ٨) (س + ٣) = س^{٢} + ١١س + ٢٤

مثال (٦) :

حلل س^{٢} – ٢س – ٣٥

الحل :

العاملان اللذان حاصل ضربهما $^{-}$٣٥ ومجموعهما $^{-}$٢ هما $^{-}$٧ ، ٥

∴ س^{٢} – ٢س – ٣٥ = (س – ٧) (س + ٥)

مثال (٧) :

حلل :

(١) س^{٢} + ١٦س + ١٥

(٢) س^{٢} – ٨س + ١٦

(٣) ٢س^{٢} – ٢٤س + ٤٠

(٤) س^{٢} – ٥ س ص + ٦ص^{٢}

الحل :

(١) س^{٢} + ١٦س + ١٥ = (س + ١٥) (س + ١)

(٢) س^{٢} – ٨س + ١٦ = (س – ٤) (س – ٤)

= (س – ٤)^{٢}

(٣) ٢س^{٢} – ٢٤س + ٤٠ = ٢(س^{٢} – ١٢س + ٢٠)

= ٢(س – ١٠) (س – ٢)

(٤) س^{٢} – ٥ س ص + ٦ص^{٢} = (س – ٢ص) (س – ٣ص)

تمرين (٧–٨)

حل ما يأتي :

(١) س^{٢} + ٥س + ٦

(٢) س^{٢} + ٥س + ٤

(٣) س^{٢} + ١٢س – ١٣

(٤) س^{٢} – ١١س – ٢٦

(٥) د^{٢} – ٥د – ٦

(٦) ل^{٢} – ١٠ل + ٢١

(٧) جـ^{٢} + جـ – ٣٠

(٨) س^{٢} – ٧س – ٦٠

(٩) ٢س^{٢} + ٢س – ١٨٠

(١٠) س^{٣} + ٦س^{٢} + ٨س

(١١) س^{٢} + ١٣س ص + ٤٢ص^{٢}

(١٢) ١٥ + ٢ أ – أ^{٢}

(١٣) س^{٢} + ١٦س ص + ٣٩ص^{٢}

الدرس العاشر : المربع الكامل ومفكوكه :

عرفنا كيف يمكن تحليل المقدار الثلاثي البسيط س^{٢} + ب س + جـ = ٠ إذا كان قابلاً للتحليل إلى عاملين من النوع : (س + م) ، (س + ن)

فالمقدار س^{٢} + ١١س + ٢٤ مثلاً يمكن تحليلة إلى العاملين (س + ٣) ، (س + ٨) وهما عاملين غير متساويين :

ولكن مقادير مثل :

س^{٢} + ٦س + ٩ ، أو ص^{٢} – ١٠ص + ٢٥ نجد أن تحليل الأول ينتج عنه العاملان : (س + ٣) ، (س + ٣) ، وتحليل الثاني ينتج عنه العاملان : (ص – ٥) ، (ص – ٥) وفي كلا الحالتين يكون العاملان متساويين مثل هذه المقادير تسمى مربعات كاملة .

فالمقدار الأول : $س^٢ + ٦س + ٩ = (س + ٣)(س + ٣)$

$= (س + ٣)^٢$

والمقدار الثاني : $ص^٢ - ١٠ص + ٢٥ = (ص - ٥)(ص - ٥)$

$= (ص - ٥)^٢$

فأي مقدار يمكن كتابته كحاصل ضرب عاملين متساويين يسمى مربعاً كاملاً .

فالمقدار $س^٢$ مربع كامل لأنه يمكن كتابته في الصورة $س × س$

وكذلك المقدار $٤ص^٢$ مربع كامل لأنه يمكن كتابته في الصورة $٢ص × ٢ص$.

والمقدار $(س + ص)^٢$ مربع كامل لأنه عبارة عن $(س + ص)(س + ص)$.

والمقدار $٩(٦ - ص)^٢$ مربع كامل لأن :

$٣(٦ - ص) × ٣(٦ - ص) = ٩(٦ - ص)^٢$

هل المقدار $٧(س + ٢)^٢$ مربع كامل ؟ ولماذا ؟

مفكوك المربع الكامل :

إذا أخذنا المقدار المربع الكامل $(س + ص)^٢$ نجد أن مفكوكه هو

$س^٢ + س ص + ص س + ص^٢$

$= س^٢ + ٢س ص + ص^٢$

وبمقارنة $(س + ص)^٢$ ومفكوكه $س^٢ + ٢س ص + ص^٢$

نجد أن مفكوك المربع الكامل الذي على الصورة (س + ص)^{٢} مقدار ثلاثي ، حده الأول س^{٢} ، والحد الثاني فيه ٢ × س × ص . والحد الثالث ص^{٢}

وبالمثل (أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ × أ × ب + ب^{٢}

= أ ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}

وكذلك (س + ٧)^{٢} = س^{٢} + ٢ × ٧ × س + ٧^{٢}

= س^{٢} + ١٤س + ٤٩

والمقدار (س − ٦)^{٢} = (س + ($^{-}$٦))^{٢}

= س^{٢} + ٢ ($^{-}$٦) × س + ($^{-}$٦)^{٢}

= س^{٢} − ١٢س + ٣٦

وبصورة عامة :

((الحد الأول) ± (الحد الثاني))^{٢} =

(الحد الأول)^{٢} ± ٢× الحد الأول × الحد الثاني + (الحد الثاني)^{٢}

أي (س ± ص)^{٢} = س^{٢} ± ٢س ص + ص^{٢}

مثال (١) :

جد مفكوك :

(أ) (س + ٩)^{٢} (ب) (ص − ٤)^{٢}

(جـ) (٢س − ٣)^{٢}

الحل :

(أ) (س + ٩)^{٢} = س^{٢} + ٢ × ٩ × س + ٩^{٢}

= س^{٢} + ١٨س + ٨١

(ب) (ص − ٤)^{٢} = ص^{٢} − ٢ × ٤ص + ١٦

= ص^{٢} − ٨ص + ١٦

(جـ) (٢س − ٣)^{٢} = ٤س^{٢} − ١٢س + ٩

مثال (٢) :

جد قيمة (٣١)^{٢} مستخدماً مفكوك المربع الكامل .

الحل :

(٣١)^{٢} = (٣٠ + ١)^{٢} = ٣٠^{٢} + ٢ × ٣٠ × ١ + ١^{٢}

= ٩٠٠ + ٦٠ + ١ = ٩٦١

تمرين (٧−٩)

(١) أي المقادير التالية مربعات كاملة ؟ ولماذا ؟

(أ) ص^{٢} (ب) ٣٦ (جـ) (٣أ)^{٢}

(د) ٥ب^{٢} (هـ) (أ − ب)^{٢} (و) ١٢ (س − ٦)^{٢}

(٢) جد مفكوك ما يلي :

(أ) (س + ٢)^{٢} (ب) (ص − ٣)^{٢} (جـ) (ص + ١٠)^{٢}

(د) (س − ٧)^{٢} (ب) (١ + ٣س)^{٢} (و) (ص − ٢س)^{٢}

(٣) جد قيمة الآتي مستعملاً مفكوك المربع الكامل :

(أ) $(٢١)^٢$ (ب) $(٥١)^٢$ (جـ) $(٤٩)^٢$

(د) $(٤١)^٢$ (هـ) $(٩٩)^٢$

الدرس الحادي عشر : تمييز وإكمال المقدار المربع الكامل :

لاحظنا عند إيجاد مفكوك المربع الكامل الثلاثي $(أ + ب)^٢$

أن $(أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢\ أب + ب^٢$

وكذلك $(أ - ب)^٢ = أ^٢ - ٢\ أب + ب^٢$

أي أن الحد الأول في المقدار الثلاثي الناتج من المفكوك يساوي مربع الحد الأول في القوس . وأن الحد الثاني في المفكوك يساوي ضعف حاصل ضرب الحدين في القوس مصحوباً بالإشارة بين الحدين في القوس وأن الحد الثالث يساوي مربع الحد الثاني في القوس . أي أن أي مقدار ثلاثي حده الأول مربع كامل وحده الثالث مربع كامل وحده الثاني أو حده الأوسط يساوي ضعف حاصل ضرب جذر الحد الأول في جذر الحد الثالث هو مربع كامل .

فالمقدار $س^٢ - ٨س + ١٦$ مربع كامل لأن :

حده الأول $س^٢$ مربع كامل وجذره س

وحده الثالث ١٦ مربع كامل وجذره ٤

وحده الأوسط يساوي $٢ \times \sqrt{س^٢} \times \sqrt{١٦}$

$= ٢ \times س \times ٤ = ٨س$

مثال (١) :

هل المقدار س^{٢} + ٢س + ١ مربع كامل .

الحل :

الحد الأول س^{٢} مربع كامل وجذره س

الحد الثالث ١ مربع كامل وجذره ١

الحد الأوسط = ٢ × س × ١ = ٢س

∴ المقدار مربع كامل .

مثال (٢) :

جد الحد الذي يمكن أضافته للمقدار س^{٢} + ٩ ليكون الناتج مربعاً كاملاً .

الحل :

بما أن الحدين س^{٢} ، ٩ مربعان كاملان :

∴ يمكن أن تعتبر الحد الأول = س^{٢} ، الحد الثالث = ٩

والحد الذي يمكن إضافته هو الحد الأوسط الذي يساوي

٢ × $\sqrt{س^{٢}}$ × $\sqrt{٩}$ = ٢س × ٣ = ٦س

∴ الحد الذي يجب إضافته هو ٦س

مثال (٣) :

ما الحد الذي يجب إضافته للمقدار ص^{٢} + ١٢ص لتكون النتيجة مربعاً كاملاً .

الحل :

بما أن الحدين الأول والأوسط موجودين ، فإن الحد الثالث يمكن الحصول على قاعدة لإيجاده كما يلي :

$$\text{بما أن الحد الأوسط} = ٢ \times \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}$$

$$\therefore \sqrt{\text{الحد الثالث}} = \frac{\text{الحد الأوسط}}{٢ \times \sqrt{\text{الحد الأول}}}$$

$$\therefore \text{بتربيع الطرفين : الحد الثالث} = \left(\frac{\text{الحد الأوسط}}{٢ \times \sqrt{\text{الحد الأول}}}\right)^{٢}$$

$$\therefore \text{الحد الثالث} = \left(\frac{١٢\ \text{ص}}{٢ \times \text{ص}}\right)^{٢} = ٣٦$$

الحد الثالث الذي يجب أضافته هو ٣٦

ملاحظة :

وبالمثل في حالة إيجاد الحد الأول إذا علم الحدان الأوسط والثالث يكون :

$$\text{الحد الأول} = \left(\frac{\text{الحد الأوسط}}{٢ \sqrt{\text{الحد الثالث}}}\right)^{٢}$$

مثال :

أكمل المقدار : .... + ١٢ س ص + ٩ ص^{٢} ليكون الناتج مربعاً كاملاً .

الحل :

$$\text{الحد المفقود} = \left(\frac{١٢\ \text{س ص}}{٢\sqrt{٩\text{ص}^٢}}\right)^٢ = \left(\frac{١٢\ \text{س ص}}{٦\text{ص}}\right)^٢$$

$$= (٢\text{س})^٢ = ٤\text{س}^٢$$

$\therefore$ $٤\text{س}^٢ + ١٢\ \text{س ص} + ٩\text{ص}^٢$

تمرين (٧–١٠)

(١) أي المقادير الآتية مربعات كاملة :

(أ) $\text{س}^٢ + ٨\text{س} + ١٦$ (ب) $\text{ن}^٢ - ٢٠\text{ن} + ١٠٠$

(جـ) $\text{ن}^٢ + ١٦$ (د) $\text{س}^٢ + ١٠\text{س} + ١٦$

(هـ) $\text{ل}^٢ - ٢\text{ل} - ١$ (و) $١ + ٢\text{س} + \text{س}^٢$

(ز) $\text{هـ}^٢ - ١٣\ \text{هـ} + ٥^٢$ (ح) $\text{س}^٢ + ٢\text{س ص} + \text{ص}^٢$

(٢) أملأ الأماكن الخالية بحيث يكون المقدار مربعاً كاملاً :

(أ) $\text{س}^٢ + ٤\text{س} + \boxed{}$ (ب) $\text{س}^٢ - ٨\text{س} + \boxed{}$

(جـ) $\text{ص}^٢ + ١٢\text{ص} + \boxed{}$ (د) $\text{هـ}^٢ - ٢٠\text{هـ} + \boxed{}$

(هـ) $\text{س}^٢ + \boxed{} + ٢٥$ (و) $\boxed{} - ١٤\text{ن} + ٤٩$

(ز) $٤\text{س}^٢ + \boxed{} + ١$ (ح) $\text{هـ}^٢ - \boxed{} + \text{ص}^٢$

الدرس الثاني عشر : تحليل المربع الكامل :

بمجرد معرفة أن المقدار الثلاثي مربع كامل ، يسهل تحليليه بعد ذلك لأننا عرفنا العلاقة بين المقدار في صورته (س ± ص)^{٢} ومفكوكه الذي على الصورة س^{٢} ± ٢ س ص + ص^{٢}

فالمقدار س^{٢} + ٦س + ٩ تحليله هو (س + ٣)^{٢}

والمقدار ٤أ^{٢} – ١٢أ + ٩ تحليله هو (٢أ – ٣)^{٢}

لأحظ أنه يجب التأكد أن المقدار الثلاثي مربع كامل أولاً قبل تحليله على هذه الصورة ، ويكون تحليله في هذه الحالة = ($\sqrt{\text{الحد الأول}}$ ± $\sqrt{\text{الحد الثالث}}$)^{٢} ، الإشارة داخل القوسين تتبع إشارة الحد الأوسط .

مثال (١) :

حلل المقدار :

س^{٢} – ٢٢س + ١٢١

الحل :

بما أن ٢ × $\sqrt{\text{س}^{٢}}$ × $\sqrt{١٢١}$

= ٢س × ١١ = ٢٢س = الحد الأوسط

∴ المقدار مربع كامل

∴ س^{٢} – ٢٢س + ١٢١ = (س – ١١)^{٢}

مثال (٢) :

حلل المقدار : ٤س^{٢} + ٢٨س + ٤٩

الحل :

بما أن ٢ × $\sqrt{٤س^{٢}}$ × $\sqrt{٤٩}$ = ٢ × ٢س × ٧

= ٢٨س ، = الحد الأوسط

∴ المقدار مربع كامل

∴ ٤س^{٢} + ٢٨س + ٤٩ = (٢س + ٧)^{٢}

تمرين (٧-١١)

حلّل المقادير الآتية :

(١) س^{٢} + ٨س + ١٦ (٢) ن^{٢} – ٦ن + ٩

(٣) ص^{٢} – ٤ص + ٤ (٤) س^{٢} + ٢٤س + ١٤٤

(٥) س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} (٦) أ^{٣} – ٢أ^{٢} + أ

الدرس الثالث عشر : تحليل الفرق بين المربعين

إذا أخذنا مقدارين على الصورة (س + ص) ، (س – ص) ووجدنا حاصل ضربهما :

(س + ص) (س – ص) = س(س – ص) + ص(س – ص)

= س^{٢} – س ص + ص س – ص^{٢}

س^{٢} – ص^{٢}

∴ س^{٢} – ص^{٢} = (س – ص) (س + ص)

لأحظ أنه إذا كان الحد الأول في المقدار الجبري مربعاً كاملاً والحد الثاني مربعاً كاملاً أيضاً وتوجد الإشارة (−) بينهما فإن المقدار يكون في صورة فرق بين مربعين وتحليله في هذه الحالة يكون كالآتي :

$$\boxed{س^{٢} - ص^{٢} = (س - ص)\ (س + ص)}$$

مثال (١) :

حلل المقدار : $ن^{٢} - ٢٥$

الحل :

$$ن^{٢} - ٢٥ = ن^{٢} - ٥^{٢}$$

$$= (ن - ٥)(ن + ٥)$$

مثال (٢) :

حلل : $ن^{٢} - ٣٦$

الحل :

$$ن^{٢} - ٦^{٢} = (ن - ٦)(ن + ٦)$$

مثال (٣) :

حلل : $٤س^{٢} - ٤٩$

الحل :

$$٤س^{٢} - ٤٩ = (٢س)^{٢} - ٧^{٢}$$

$$= (٢س - ٧)(٢س + ٧)$$

مثال (٤) :

حلل : ٥٠ – ٨$س^٢$

الحل :

٥٠ – ٨$س^٢$ = ٢(٢٥ – ٤$س^٢$)

= ٢($٥^٢$ – $(٢س)^٢$)

= ٢(٥– ٢س)(٥ + ٢س)

تمرين (٧–١٢)

(١) حلل الآتي :

(أ) $ن^٢$ – ١٦ (ب) $م^٢$ – $ن^٢$

(ج) ٤$س^٢$ – ١ (د) ١٦$أ^٢$ – ٤$ب^٢$

(هـ) $ص^٢$ – ١ (و) ١– ١٤٤$س^٢$

(ز) ٢ – ١٨$س^٢$

(٢) عبرّ عن الآتي بصورة الفرق بين المربعين :

(أ) (ن + ١)(ن – ١) (ب) (س + ٦)(س – ٦)

(ج) (س – ١٠)(س + ١٠) (د) (٣م – ٢)(٣م + ٢)

(هـ) (ل – ١٥)(ل + ١٥) (و) (س ن – هـ)(س ن + هـ)

الدرس الرابع عشر : تابع تحليل الفرق بين مربعين :

مثال (١) :

حلل ما يلي :

$(س + ١)^٢$ – ٤

الحل :

(س + ١)^{٢} – ٤ = (س + ١)^{٢} – ٢^{٢}

= [س + ١ – ٢] [س + ١ +٢]

= (س – ١) (س + ٣)

مثال (٢) :

حلل : ١٠٠ – (٢س + ٥)^{٢}

الحل :

١٠٠ – (٢س + ٥)^{٢} = ١٠^{٢} – (٢س + ٥)^{٢}

= [١٠ – (٢س + ٥)] [١٠ + (٢س + ٥)]

= [١٠ – ٢س – ٥] [١٠ + ٢س + ٥]

= (٥ – ٢س) (١٥ + ٢س)

مثال (٣) :

حلل : (س + ٣)^{٢} – (٣س – ١)^{٢}

الحل :

(س+٣)^{٢} – (٣س – ١)^{٢} = [(س + ٣) – (٣س – ١)]

[(س + ٣) + (٣س – ١)]

= (س + ٣ – ٣س + ١) (س + ٣ + ٣س – ١)

= (٤ – ٢س) (٤س + ٢)

= ٢(٢ – س) × ٢(٢س + ١)

= ٤(٢ – س) (٢س + ١)

تمرين (٧–١٣)

حلل الآتي تحليلاً كاملاً :

(أ) (س + ١)^{٢} – ١

(ب) (س + ١)^{٢} – أ^{٢}

(جـ) ٤ – (٢س – ٣)^{٢}

(د) ٢ – ٢(٥ – س)^{٢}

(هـ) (س + ١)^{٢} – (أ–١)^{٢}

(و) (م + ن)^{٢} – (م – ن)^{٢}

(ز) (س^{٢} – ص^{٢}) – (س – ص)

الدرس الخامس عشر : تطبيقات على الفرق بين المربعين :

مثال (١) :

جد قيمة ٣٩ × ٤١ بدون استعمال الضرب المعتاد .

الحل :

٣٩ × ٤١ = (٤٠ – ١) (٤٠ + ١)

= ٤٠^{٢} – ١^{٢}

= ١٦٠٠ – ١ = ١٥٩٩

مثال (٢) :

جد قيمة ١٨ × ٢٢ بدون استعمال الضرب المعتاد .

الحل :

١٨ × ٢٢ = (٢٠ – ٢) (٢٠ + ٢)

= ٢٠^{٢} – ٢^{٢}

= ٤٠٠ – ٤ = ٣٩٦

مثال (٣) :

جد قيمة ٤٩٩^{٢} − ٤٩٨^{٢}

الحل :

٤٩٩^{٢} − ٤٩٨^{٢} = (٤٩٩ − ٤٩٨) (٤٩٩ + ٤٩٨)

= ١ × ٩٩٧ = ٩٩٧

تمرين (٧−١٤)

(١) بدون إجراء الضرب المعتاد جد قيمة :

(أ) ١٧ × ٢٣ (ب) ٢٨ × ٣٢

(جـ) ٤٨ × ٥٢ (د) ١٠١ × ٩٩

(هـ) ٣٧ × ٤٣ (و) (٤٩س) (٥١س)

(٢) جد قيمة الآتي :

(أ) (٦٧٨٩)^{٢} − (٦٧٨٨)^{٢}

(ب) (٥٤٧٢)^{٢} − (٥٤٧٠)^{٢}

(جـ) (١٩٢٣)^{٢} − (١٩١٣)^{٢}

الدرس السادس عشر : مجموع وفرق المكعبين

إذا أخذنا المقدار (س^{٢} − س ص + ص^{٢}) وضربناه في مقدار آخر وليكن (س + ص) فأننا نحصل على :

(س + ص) (س^{٢} − س ص + ص^{٢}) =

س (س^{٢} − س ص + ص^{٢}) + ص(س^{٢} − س ص + ص^{٢})

= س^{٣} – س^{٢}ص + س ص^{٢} + ص س^{٢} – س ص^{٢} + ص^{٣}

= س^{٣} + ص^{٣}

أي أن : س^{٣} – ص^{٣} = (س + ص) (س^{٢} – س ص + ص^{٢})

وكذلك إذا أخذنا المقدار (س^{٢} + س ص + ص^{٢}) ضربناه في المقدار س – ص نحصل على :

(س – ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢}) =

س (س^{٢} + س ص + ص^{٢}) – ص(س^{٢} + س ص + ص^{٢})

= س^{٣} + س^{٢}ص + س ص^{٢} – ص س^{٢} – س ص^{٢} – ص^{٣}

= س^{٣} – ص^{٣}

أي أن : س^{٣} – ص^{٣} = (س – ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

ونطلق على حد مثل س^{٣} مكعب س ، و ص^{٣} مكعب ص ، فيكون المقدار س^{٣} + ص^{٣} ، هو مجموع المكعبين وكذلك المقدار س^{٣}– ص^{٣} **هو فرق المكعبين**

وبما أن المقدار س^{٢} – س ص + ص^{٢} غير قابل للتحليل وكذلك المقدار س^{٢} + س ص + ص^{٢}

فإن تحليل مجموع المكعبين

س^{٣}+ ص^{٣} = (س + ص) (س^{٢} – س ص + ص^{٢})

وكذلك تحليل فرق المكعبين :

س^{٣} – ص^{٣} = (س – ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

وبهذا يمكن تحليل أي مقدار إذا أمكن وضعه على صورة مجموع مكعبين أو الفرق بينهما تبعاً للقاعدة :

(الأول)^{٣} ± (الثاني)^{٣} =

(الأول ± الثاني) (الأول^{٢} ± الأول × الثاني + الثاني^{٢})

أي س^{٣} ± ص^{٣} (س ± ص) (س^{٢} ∓ س ص + ص^{٢})

لاحظ للإشارة في القوس الأول من الطرف الأيسر تشابه الإشارة بين الحدين المكعبين وإشارة الحد الثاني من القوس الثاني تخالف الإشارة بين الحدين المكعبين .

مثال (١) :

حلل ما يأتي :

(أ) ٦٤ + ص^{٣}

(ب) ٢٧س^{٣} – ١

(جـ) ١ + ٨ص^{٣}

الحل :

(أ) ٦٤ + ص^{٣} = ٤^{٣} + ص^{٣}

= (٤ + ص) (٤^{٢} – ٤ص + ص^{٢})

= (٤ + ص) (١٦ – ٤ص + ص^{٢})

(ب) ٢٧س^{٣} – ١ = (٣س)^{٣} – ١^{٣}

= (٣س –١) ((٣س)^{٢} + ٣س × ١ + ١^{٢})

= (٣س – ١) (٩س^{٢} + ٣س + ١)

(جـ) ١ + ٨ص^{٣} = ١^{٣} + (٢ص)^{٣}

= (١ + ٢ص) (١ – ٢ص + ٤ص^{٢})

تمرين (٧ – ١٥)

حلّل ما يأتي :

(١) أ^{٣} – ١

(٢) ٢٧ + ٨س^{٣}

(٣) ٦٤س^{٣} + ٢٧

(٤) ١ – ٢٧ص^{٣}

(٥) د^{٣}جـ^{٣} – ١

(٦) ع^{٣} – ٦٤س^{٣}

(٧) ٢٤ + ٣س^{٣}

الوحدة الثامنة

معادلة الدرجة الثانية

تمرين مراجعة

(١) جد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية (س ∈ ن)

(أ) ٣س + ٥ = ٢س − ١

(ب) ٢س − ٧ = ٣س + ٥

(جـ) ٥س + ٣ = ١٥ − س

(د) ١٢س − ٩ = ٤س − ٥

(هـ) $\frac{س}{٤} + \frac{س - ٥}{٣} = ١٠$

(و) ٣(س − ١) = ٢(س + ١)

(٢) حلّل كلا من المقادير التالية :

(أ) س^{٢} − ٥س

(ب) ص^{٢} + ٤ص + ٤

(جـ) س^{٢} + س − ١٢

(د) هـ^{٢} + ٤هـ − ٥

(هـ) س^{٢} + ٩س + ١٨

(و) ص^{٢} − ١١ص + ٢٨

(ز) (س − ٣)^{٢} − ٢٥

الدرس الأول : الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية :

كل معادلة بعد تبسيطها إذا احتوت على مجهول واحد ، وكانت أعلى درجة للمجهول فيها الدرجة الثانية ، أي أكبر أس للمجهول س هو ٢ ، سميت **معادلة من الدرجة الثانية ذات مجهول واحد** . وكتبت على الصورة العامة التالية :

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠

س هو المجهول ، أ ، ب ، جـ كميات معلومة .

أ تسمى معامل س^{٢} ، ب معامل س ، جـ الحد المطلق .

مجموعة حل معادلة الدرجة الثانية :

نحن نعلم من خواص مجموعات الأعداد أنه إذا كان أ ×ب = ٠ ، أ ، ب ∈ ح ، هذا يعني أنه إما أ = ٠ أو ب = ٠ أو أ = ب = ٠

عليه يكون أنه إذا حللنا أي مقدار جبري يكفي أن يكون أحد عوامله يساوي صفراً لتكون قيمة المقدار تساوي الصفر .

مثلاً :

إذا كان أ × ب × ج × ... × ي = ٠ فإن أ = ٠ أو ب = ٠ أو ج = ٠ ... أو ي = ٠

وعرفنا سابقاً أنه إذا كان س + ٣ = ٠ (س ∈ ح) فإن مجموعة حل هذه المعادلة هي {–٣}

- إذن ما مجموعة حل المعادلة ؟

(س + ١)(س – ٣) = ٠ عرفنا أنه إذا كان (س + ١) (س – ٣) = ٠

فإننا نستنتج : إما س + ١ = ٠ وهذا يعني أن س = ¯١

أو س – ٣ = ٠ وهذا يعني أن س = ٣

أي إذا كان س = ¯١ أو س = ٣ فإن (س + ١) (س − ٣) = ٠

∴ مجموعة حل المعادلة (س + ١) (س − ٣) = ٠

هي { ¯١ } ∪ { ٣ } = { ¯١ ، ٣ }

مثال (١) :

إذا كان س ∈ ص ، جد مجموعة حل المعادلة :

(س − ١) (س + ٥) = ٠

الحل :

(س − ١) (س + ٥) = ٠

∴ إما س – ١ = ٠ ، س = ١

أو س + ٥ = ٠ ، س = ¯٥

∴ مجموعة الحل = { ١ ، ¯٥ }

مثال (٢) :

جد مجموعة حل المعادلة :

(س + ٣) (س + ٧) = ٠

الحل :

(س + ٣) (س + ٧) = ٠

∴ إما س + ٣ = ٠ ، س = ¯٣

أو س + ٧ = ٠ ، س = ¯٧

∴ مجموعة الحل = { ¯٣ ، ¯٧ }

تمرين (٨−١)

(١) أكتب معامل س^{٢} ، معامل س ، الحد المطلق للمعادلات الآتية :

(أ) ٢س^{٢} + س − ١ = ٠

(ب) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٥س + ٣ = ٠

(جـ) ٢− س^{٢} + س = ٠

(د) ١ + س + س^{٢} = ٠

(٢) جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(س ∈ ح)

(أ) (س − ٣) (س + ١) = ٠

(ب) (س + ٢) (س − ٤) = ٠

(جـ) (س − ٥) (س − ١) = ٠

(د) (س + ١) (س − ٣) = ٠

(هـ) (س + ٧) (س + ١) = ٠

الدرس الثاني : حل معادلات الدرجة الثانية :

حل معادلة الدرجة الثانية يقصد به إيجاد مجموعة الأعداد التي لو وضعنا أيّا منها بدل المتغير س لتحققت المعادلة ، أي ايجاد مجموعة حلها .

فمثلاً :

إذا وضعنا العدد ١ بدلاً عن س في المعادلة س^{٢} + ٣س − ٤ = ٠

لوجدنا أن الطرف الأيمن = ١^{٢} + ٣ × ١ − ٤ = ٠

وبذلك تتحقق المعادلة ويكون العدد ١ هو حل لهذه المعادلة . وإذا وضعنا العدد ⁻٤ بدلاً عن س في نفس المعادلة لوجدنا أن :

الطرف الأيمن = $(^{-}٤)^{٢}$ + ٣($^{-}$٤) – ٤ = ١٦ – ١٢ – ٤ = ٠

وبذا تتحقق المعادلة ويكون العدد ⁻٤ هو أيضاً حلاً لهذه المعادلة . وكثيراً ما نستخدم اسم **جذر المعادلة** لقيمة حل المعادلة .

أما إذا وضعنا ٢ بدلاً عن س في الطرف الأيمن = ٤ + ٦ – ٤ = ٦ وهنا لا تتحقق المعادلة ولا يكون ٢ حلا للمعادلة .

وتوجد عدة طرق لحل معادلة الدرجة الثانية وسنتعرض لواحدة من هذه الطرق تسمى طريقة حل معادلة الدرجة الثانية **بالتحليل** وسنتناول فقط المعادلات التي يكون فيها معامل $س^{٢}$ الواحد .

أي عندما تكون الصورة العامة للمعادلة هي :

$س^{٢}$ + ب س + جـ = ٠

وفي هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية :

(١) نحول المعادلة إلى معادلة صفرية .

(٢) نحلل المقدار في الطرف الأيمن إلى عاملين كل منهما من الدرجة الأولى .

(٣) نساوي كل عامل من عوامل الدرجة الأولى بالصفر .

(٤) نحل كل من معادلتي الدرجة الأولى الناتجتين .

مثال (١) :

حل المعادلة $س^{٢}$ + س – ٦ = ٠

الحل :

بتحليل الطرف الأيمن للمعادلة : (س + ٣) (س – ٢) = ٠

∴ إما س + ٣ = ٠ ، ومنها س = $^{-}٣$

أو س – ٢ = ٠ ، ومنها س = ٢

∴ للمعادلة حلان أو جذران هما $^{-}٣$ ، ٢

والمجموعة { $^{-}٣$ ، ٢ } هي مجموعة الحل في مجموعة التعويض ص

وإذا حاولت أن تجد أي حل أو جذر آخر فلن تستطيع لأن لمعادلة الدرجة الثانية جذران فقط .

مثال (٢) :

جد جذري المعادلة التالية (س ∋ ص)

$س^{٢}$ – ٧س + ٦ = ٠

الحل :

تحليل الطرف الأيمن :

(س – ٦) (س – ١) = ٠

∴ إما س – ٦ = ٠ ، ومنها س = ٦

أو س – ١ = ٠ ، ومنها س = ١

∴ للمعادلة حلان أو جذران هما ٦ ، ١

تمرين (٨–٢)

حل المعادلات التالية في ح :

(١) س^{٢} + ٤س + ٣ = ٠

(٢) س^{٢} – ٢س – ٣ = ٠

(٣) س^{٢} – ٤س = ٥

(٤) س^{٢} + ٧س + ٦ = ٠

(٥) س^{٢} + ٣س – ١٠ = ٠

(٦) س^{٢} – ٢س + ١ = ٠

(٧) س^{٢} – ٦س = ١٦

جد جذري المعادلات الآتية في ح :

(٨) س^{٢} = ٢س + ٣

(٩) س^{٢} + ٥س = ١٤

(١٠) س^{٢} – ٩س + ١٤ = ٠

الدرس الثالث : الحالات الخاصة لمعادلة الدرجة الثانية :

نقول عن معادلة الدرجة الثانية ذات مجهول واحد أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ أنها معادلة **غير تامة** إذا كان أحد المعاملين ب أو جـ يساوي صفراً ، وفي هاتين الحالتين يكون حل المعادلة سهلاً .

* الحالة الأولى : جـ = ٠

في هذه الحالة تكون المعادلة على الصورة :

س^{٢} + ب س = ٠

وتحلل إلى الشكل : س (س + ب) = ٠

والحلان هما : س = ٠ أو س + ب = ٠ ، ومنها س = $^-$ب

∴ مجموعة الحل = { ٠ ، $^-$ب }

* الحالة الثانية : ب = ٠

وفي هذه الحالة تكون المعادلة على الصورة الثانية

س^{٢} + جـ = ٠

س^{٢} = $^-$جـ

وباستخراج الجذر التربيعي للطرفين نحصل على

س = ± $\sqrt{^-\text{جـ}}$ ويكونان هما جذرا المعادلة .

مثال (١) :

جد بالتحليل مجموعة حل المعادلة الآتية :

س^{٢} – ٧س = ٠

الحل :

س^{٢} – ٧س = ٠

س(س – ٧) = ٠

∴ إما س = ٠ أو س – ٧ = ٠

ومنها س = ٧

∴ مجموعة الحل = { ٠ ، ٧ }

مثال (٢) :

جد جذري المعادلة :

س^{٢} – ٩ = ٠

(س ∈ ح)

الحل :

$س^{٢} - ٩ = ٠$

∴ $س^{٢} = ٩$

∴ $س = \pm \sqrt{٩}$

∴ جذرا المعادلة ٣ ، $^{-}٣$

مثال (٣) :

جد مجموعة حل المعادلة :

$س^{٢} - ١ = ٠$

الحل :

$س^{٢} - ١ = ٠$

∴ $س^{٢} = ١$

∴ $س = \pm \sqrt{١} = \pm ١$

∴ مجموعة الحل { ١ ، $^{-}١$ }

مثال (٤) :

جد مجموعة حل المعادلة :

$س^{٢} + ٢٥ = ٠$

(س ∋ ح)

الحل :

$س^{٢} + ٢٥ = ٠$ ، $س^{٢} = {}^{-}٢٥$

المعادلة مستحيلة الحل في ح لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعة سالب .

∴ مجموعة الحل = ∅

تمرين (٨–٣)

جد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

(س $\in$ ح)

(١) $س^٢ - ٤٩ = ٠$

(٢) $س^٢ + ٧س = ٠$

(٣) $س^٢ - ٨١ = ٠$

(٤) $س^٢ - ١٦ = ٠$

(٥) $س^٢ + ٥ = ٠$

(٦) $س^٢ - ٥س = ٠$

(٧) $٧س - س^٢ = ٠$

(٨) $س^٢ + ١ = ٠$

الدرس الرابع : تكوين معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد إذا علم جذراها :

إذا كان جذرا معادلة ما من الدرجة الثانية متغيرها س هما م ، ن فهذا يعني أن س = م أو س = ن

ومنها س – م = ٠ ، س – ن = ٠

وهذا يعني أن : (س – م) (س – ن) = ٠

وعند إيجاد مفكوك الطرف الأيمن نحصل على الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية حيث مفكوكها : $س^٢ - ن س - م س + م ن = ٠$

أي $س^٢ - (م + ن) س + م ن = ٠$

وإذا كتبنا المعادلة الناتجة في صورتها العامة كما يلي :

س^{٢} + ب س + جـ = ٠

حيث معامل س^{٢} = ١ ، نجد أن :

(١) سالب حاصل جمع جذري المعادلة يساوي معامل س حيث س هو المتغير في المعادلة .

(٢) حاصل ضرب جذري المعادلة يساوي الحد المطلق .

إذن يمكن تكوين المعادلة إذا علم جذراها كما في الأمثلة التالية :

مثال (١) :

كون معادلة من الدرجة الثانية إذا علمت أن جذريها هما ٣ ، $^{-}$١ ومتغيرها س .

الحل :

إذا كان ٣ ، $^{-}$١ جذري المعادلة فإن حاصل جمع الجذرين = ٣ + $^{-}$١ = ٢

∴ معامل س = $^{-}$٢

حاصل ضر الجذرين = $^{-}$١ × ٣ = $^{-}$٣

∴ الحد المطلق = $^{-}$٣

∴ المعادلة هي س^{٢} – ٢س – ٣ = ٠

حل آخر :

بما أنه ٣ ، $^{-}$١ هما جذرا المعادلة .

∴ س = ٣ أو س = $^{-}$١

∴ س – ٣ = ٠ أو س + ١ = ٠

∴ (س – ٣) (س + ١) = ٠

∴ $س^{٢}$ + س – ٣س – ٣ = ٠

∴ المعادلة $س^{٢}$ – ٢س – ٣ = ٠

مثال (٢) :

كون المعادلة التي مجموعة الحل لها { ٣ ، ٧ }

الحل :

بفرض أن المجهول في المعادلة المطلوبة س

∴ س = ٣ ، أو س = ٧

∴ س – ٣ = ٠ أو س – ٧ = ٠

∴ (س – ٣) (س – ٧) = ٠

∴ $س^{٢}$ – ١٠س + ٢١ = ٠

مثال (٣) :

كون المعادلة التي جذريها ¯٥ ، ¯١

الحل :

نفرض أن المجهول في المعادلة هو ص

بما أن جذري المعادلة هما ¯٥ ، ¯١

∴ حاصل جمع الجذرين = ¯٥ + ¯١ = ¯٦

∴ معامل ص = ٦

حاصل ضرب الجذرين = ¯٥ × ¯١ = ٥

∴ الحد المطلق = ٥

∴ المعادلة ص^{٢} + ٦ص + ٥ = ٠

مثال (٤) :

إذا كان أحد جذري المعادلة س^{٢} + ب س − ٢٠ = ٠ هــو ٢ ، جد الجذر الآخر ، ومن ثم جد قيمة ب .

الحل :

نفرض أن الجذر الآخر هو م

∴ ٢م = $^{-}$٢٠

∴ م = $^{-}$١٠

أي الجذر الآخر = $^{-}$١٠

ب = سالب حاصل جمع الجذرين

= −($^{-}$١٠ + ٢) = $^{-}$($^{-}$٨) = ٨

تمرين (٨−٤)

(١) جد معادلة الدرجة الثانية التي جذراها $^{-}$٢ ، ١ .

(٢) كون المعادلة التي جذراها $^{-}$٣ ، ٥

(٣) كون المعادلة التي جذراها متساويان وقيمة كل منهما ٤

(٤) كون المعادلة التي جذراها متساويان وقيمة كل منها $^{-}$٧

(٥) بدون حل للمعادلات الآتية : جد حاصل جمع وحاصل ضرب الجذرين في كل مما يأتي :

(أ) س^{٢} + ٨س − ٤٨ = ٠

(ب) س = ٦ – س^{٢}

(جـ) س^{٢} – ٣ = س

(٦) إذا كان أحد جذري المعادلة س^{٢} + ك س + ٦ = ٠ هو ٣ جد الجذر الآخر وقيمة ك .

(٧) المعادلة س^{٢} + س + جـ = ٠ أحد جذريها هو ١ جد الجـــذر الآخر وقيمة جـ .

(٨) جد قيمة م ، ن إذا كان جذرا المعادلة :

س + (ن + ١) س + ٣م = ٠ هما ٢ ، ٩

تمرين عام

(أ) جد مجموعة حل كل المعادلات الآتية :

(١) س^{٢} – ٧س + ٦ = ٠	(٢) س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠
(٣) س^{٢} – ٥س = ٠	(٤) س^{٢} – ١ = ٠
(٥) ٣س – س^{٢} = $^{-}$٤	(٦) $^{-}$س^{٢} + ٤س – ٤ = ٠
(٧) س^{٢} – ١٤س + ٤٨ = ٠	(٨) س(س – ٢) = ٤٨

(ب) كون المعادلة التي مجموعة الحل لها ما يأتي :

(٩) { ٦ ، ٣ }	(١٠) { ٥ ، ٢ }
(١١) { $^{-}$٣ ، $^{-}$٧ }	(١٢) { ٠ ، $^{-}$٤ }
(١٣) { ٤ ، ٤ }	

(جـ) إذا علمت أن جذري المعادلة

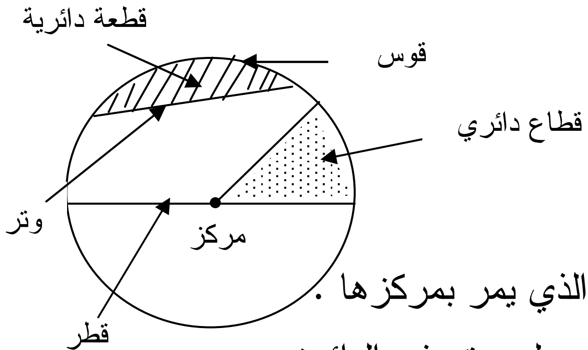
س^{٢} – (م – ٢) س – (٣ – ن) = ٠ هما $^{-}$١ ، $^{-}$٢ ، جد قيمة كل من م ، ن

الوحدة التاسعة

الدائرة

الدرس الأول : تعاريف :

- **الدائرة :** هي مجموعة النقط في المستوى التي تبعد عن نقطة ثابتة (المركز) ، بعداً ثابتاً (نصف القطر) .
- **نصف قطر الدائرة :** هو القطعة المستقيمة التي تصل بين مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة .
- **الوتر :** هو القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتين من نقاط الدائرة .



الشكل (٩–١)

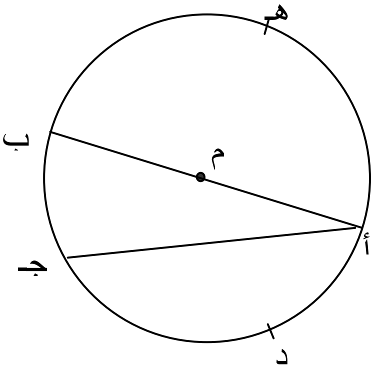
- **القطر :** هو وتر الدائرة الذي يمر بمركزها .
- **القاطع** هو مستقيم يحتوي على وتر في الدائرة .
- **القوس** عبارة عن جزء من محيط الدائرة .
- **القطاع الدائري :** هو جزء من مساحة الدائرة محصورة بين قوس ونصفي قطرين .
- **القطعة الدائرية :** هي جزء من مساحة الدائرة محصورة بين وتر وقوس .
- **الزاوية المركزية :** هي الزاوية التي يقع رأسها في مركز الدائرة، وضلعاها نصفا قطرين .
- **الزاوية المحيطية :** هي الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة .

تمرين (٩-١)

(أ) م هو مركز الدائرة في هذا التمرين

(١) من الشكل (٩-٢) المقابل أكمل العبارات الآتية :

- يسمى أ ب ....
- يسمى أ جـ ....
- يسمى أ د جـ ....



الشكل (٩-٢)

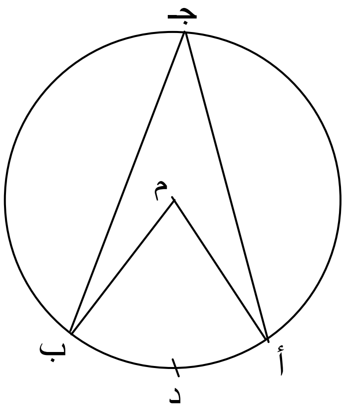
(٢) ومن نفس الشكل (٩-٢) أجب على ما يأتي :

- هل أ ب وتر ؟ ولماذا ؟
- هل أ هـ ب قوس ؟ ولماذا ؟
- هل د جـ ب قوس ؟ ولماذا ؟
- أذكر قوساً أكبر من نصف الدائرة ؟

(ب) انقل الشكل (٩-٣) المقابل في كراستك إذا كان م مركز الدائرة :

(١) ظلل قطاعاً دائريا هكذا ☰

(٢) ظلل قطعة دائرية هكذا ⁞⁞⁞⁞



الشكل (٩-٣)

(٣) سم زاوية مركزية وأذكر القوس المنشأة عليه .

(٤) سم زاوية محيطية وأذكر القوس المنشأة عليه .

(٥) أرسم زاوية محيطية أخرى ، منشأة على نفس القوس .

(٦) أذكر القوس المنشأة عليه الزاوية المركزية المنعكسة أ م ب .

الدرس الثاني الأوتار المتساوية والأقواس المتساوية :

تمهيد :

إذا قسمنا الدائرة إلى قطاعات ذات زوايا مركزية متساوية ، وكانت قيمة الزاوية المركزية تساوي ١٠° فإننا نحصل على ٣٦ قطاعاً دائرياً ، لأن مجموع الزوايا المتجمعة في المركز ٣٦٠° ، وسنجد أن أقواس هذه القطاعات متساوية ، وعليه نجد أن طول قوس كل قطاع يساوي $\frac{١}{٣٦}$ من الدائرة (محيط الدائرة) أي $\frac{١٠}{٣٦٠}$ من الدائرة ومن هذا نستنتج أ ن :

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{الزاوية المركزية}}{٣٦٠}$$

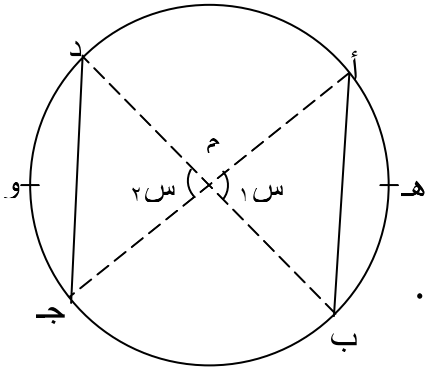
أي : **طول القوس** = $\frac{\textbf{الزاوية المركزية}}{\textbf{٣٦٠}}$ × **محيط الدائرة** .

مثال (١) :

في الدائرة التي مركزها م إذا كان الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ يساوي الوتر $\overline{\text{جـ د}}$

أثبت أن $\overset{\frown}{\text{أ هـ ب}} = \overset{\frown}{\text{جـ و د}}$

الحل :



من Δ أ ب م Δ جـ د م

$\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{جـ د}}$ (معطى)

$\overline{\text{أ م}} = \overline{\text{جـ م}}$ (نصفا قطرين) .

$\overline{\text{ب م}} = \overline{\text{د م}}$ (نصفا قطرين) .

المثلثان متطابقان (ض ، ض ، ض) .

$\therefore \text{س}_{١} = \text{س}_{٢}$

$$\overset{\frown}{\text{أ هـ ب}} = \text{٢} \times \overline{\text{أ م}} \times \pi \times \frac{\text{س}_{١}}{\text{٣٦٠}}$$

$$\overset{\frown}{\text{جـ و د}} = \text{٢} \times \overline{\text{جـ م}} \times \pi \times \frac{\text{س}_{٢}}{\text{٣٦٠}}$$

وبما أن : $\overline{\text{أ م}} = \overline{\text{جـ م}}$ ، $\text{س}_{١} = \text{س}_{٢}$

$\therefore \overset{\frown}{\text{أ هـ ب}} = \overset{\frown}{\text{جـ و د}}$

وهكذا نجد أن :

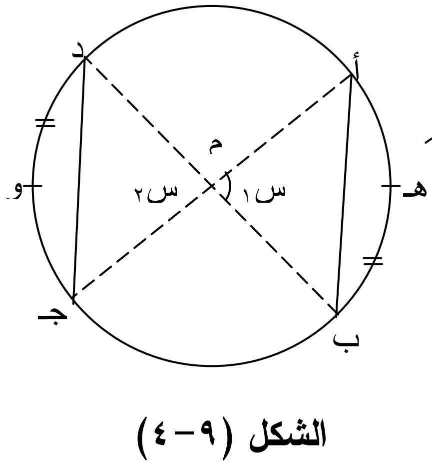
> **الأوتار المتساوية في الدائرة نفسها (أو في الدوائر المتساوية) تقطع أقواساً متساوية .**

مثال (٢) :

في الشكل (٩-٤) المقابل إذا كان :

م مركز الدائرة ، $\overset{\frown}{\text{أ هـ ب}} = \overset{\frown}{\text{جـ و د}}$

أثبت أن $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{جـ د}}$.



الشكل (٩-٤)

الحل :

$\overset{\frown}{أ\ هـ\ ب} = ٢\ \overline{أ\ م} \times \pi \times \frac{س_١}{٣٦٠}$

$\overset{\frown}{جـ\ و\ د} = ٢\ \overline{جـ\ م} \times \pi \times \frac{س_١}{٣٦٠}$

ولكن $\overline{أ\ م} = \overline{جـ\ م}$ (نصفا قطرين)

$\overset{\frown}{أهـ\ ب} = \overset{\frown}{ج\ و\ د}$ (معطى)

∴ $س_١ = س_٢$

في Δ أ ب م ، Δ جـ د م

$\overline{أ\ م} = \overline{جـ\ م}$ (نصفا قطرين في الدائرة نفسها)

$\overline{ب\ م} = \overline{د\ م}$ (نصفا قطرين في الدائرة نفسها)

$س_١ = س_٢$ (بالبرهان)

∴ المثلثان متطابقان (ض ، ز ، ض)

∴ $\overline{أ\ ب} = \overline{جـ\ د}$

وهكذا نجد أن :

> **الأقواس المتساوية في الدائرة نفسها**
> **(أو في الدوائر المتساوية) تقطعها أوتار متساوية .**

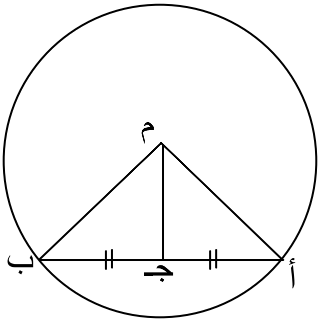
الدرس الثالث : نظرية (١) :

> **المستقيم الذي يصل منتصف الوتر بمركز الدائرة يكون عمودياً على الوتر .**

المعطى :

دائرة مركزها م ، جـ منتصف الوتر $\overline{\text{أ ب}}$.

المطلوب إثباته :



$\overline{\text{م جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

صل $\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$

البرهان :

في Δ أ جـ م ، Δ ب جـ م

$\overline{\text{أ جـ}}$ = $\overline{\text{ب جـ}}$ (معطى)

$\overline{\text{أ م}}$ = $\overline{\text{ب م}}$ (نصفا قطرين)

$\overline{\text{م جـ}}$ = $\overline{\text{م جـ}}$ (مشترك)

∴ المثلثان متطابقان (ض ، ض ، ض)

∴ ∠ أ جـ م = ∠ ب جـ م

لكن ∠ أ جـ م + ∠ ب جـ م = ١٨٠° (الزاوية مستقيمة)

∠ أ جـ م = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠°

∴ $\overline{\text{م جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

الدرس الرابع : نظرية (٢) :

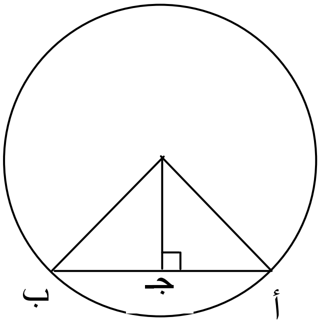
> **العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر ينصف الوتر .**

المعطى :

دائرة مركزها م ،

$\overline{\text{م جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

المطلوب إثباته :



العمود م جـ ينصف الوتر أ ب

العمل :

صل م أ ، م ب

البرهان :

في Δ أ جـ م ، Δ ب جـ م

أ م = ب م (نصفا قطر)

∢ أ جـ م = ∢ ب جـ م = ٩٠° (معطى)

م جـ = م جـ (مشترك)

∴ المثلثان متطابقان (ض ، و ، ق)

∴ أ جـ = ب جـ

العمود م جـ ينصف الوتر أ ب

نتيجة :

المنصف العمودي لأي وتر في الدائرة يمر بمركز الدائرة .

مثال (١) :

يقطع مستقيم دائرتين متحدتي المركـز (أي مركزهمـا واحـد) الكبرى في ل ، ك والصغرى في م ، ن . أثبت أن ل م = ن ك

الحل :

المعطى :

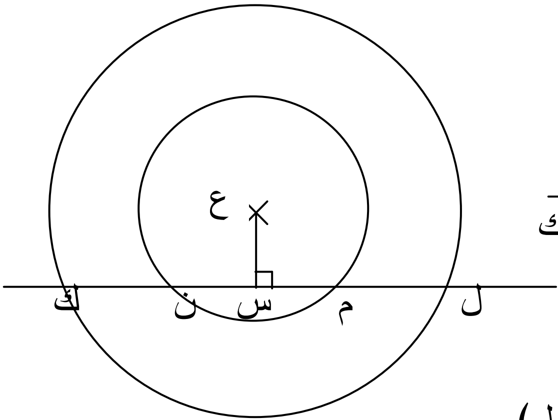
ع مركز الدائرتين في الشكل (٩ – ٥) المقابل ،
ل ، م ، ن ، ك على استقامة واحدة .

المطلوب إثباته :

$\overline{\text{ل م}} = \overline{\text{ن ك}}$

العمل :

أرسم $\overline{\text{ع س}} \perp \overline{\text{ل ك}}$



الشكل (٩– ٥)

البرهان :

$\overline{\text{ع س}} \perp \overline{\text{ل ك}}$ (عمل)

$\therefore$ $\overline{\text{ل س}} = \overline{\text{ك س}}$ (نظرية) (١)

وفي الدائرة الصغرى :

$\overline{\text{ع س}} \perp \overline{\text{م ن}}$ (عمل)

$\therefore$ $\overline{\text{م س}} = \overline{\text{ن س}}$ (نظرية) (٢)

بطرح (٢) من (١) نجد أن :

$\overline{\text{ل س}} - \overline{\text{م س}} = \overline{\text{ك س}} - \overline{\text{ن س}}$

$\therefore$ $\overline{\text{ل م}} = \overline{\text{ن ك}}$

تمرين (٩–٢)

(١) الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ على بعد ٣سم من مركز دائرة نصف قطرها ٥سم ، أحسب طول الوتر .

(٢) وتر طوله ٤,٢سم يبعد عن مركز الدائرة ٢,٨سم ، أحسب نصف قطر الدائرة .

(٣) إذا كان م مركز دائرة نصف قطرها ٣٧سم ، وطول الوتر أ ب = ٢٤سم ، أحسب مساحة ∆ أ ب م .

(٤) أ ب قطر ، أ جـ وتر في دائرة مركزها م ، د نقطة على الوتر أ جـ حيث م د ⊥ على أ جـ ، أثبت أن : ب جـ = ٢ م د .

(٥) أ ب وتر في دائرة وطوله ٢٤سم وبعده عن المركز ٥سم ، جـ د وتر آخر في نفس الدائرة بعده عن المركز ١٢سم ، أحسب طول جـ د .

(٦) أ ب ، جـ د وتران متعامدان في دائرة مركزها م ويتقاطعان في س فإذا علم أن ص منتصف أ ب ، ع منتصف جـ د .
أثبت أن الشكل س ع م ص مستطيل .

الدرس الخامس: تطبيقات على العمود النازل من مركز الدائرة:

أ- إذا تساوى وتران في دائرة فإن بعديهما عن المركز متساويان :

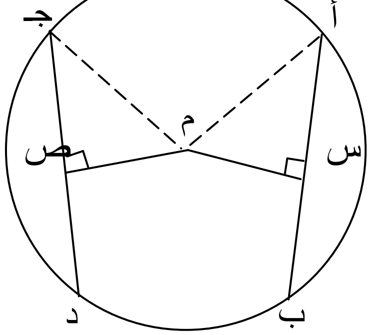
المعطيات :

دائرة مركزها م

الوتر أ ب = الوتر جـ د

المطلوب إثباته :

م س = م ص



العمل :

صل $\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{جـ م}}$

البرهان :

بما أن $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{أ س}} = \frac{1}{2}\,\overline{\text{أ ب}}$ (نظرية العمود النازل من المركز)

وبالطريقة نفسها $\overline{\text{جـ ص}} = \frac{1}{2}\,\overline{\text{جـ د}}$

ولكن $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{جـ د}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{أ س}} = \overline{\text{جـ ص}}$

في $\triangle$ أ س م ، $\triangle$ جـ ص م

$\overline{\text{أ س}} = \overline{\text{جـ ص}}$ (بالبرهان)

$\overline{\text{أ م}} = \overline{\text{جـ م}}$ (نصفا قطرين)

$\angle$ أ س م = $\angle$ جـ ص م = ٩٠° (معطى)

∴ المثلثان متطابقان (ض ، و ، ق)

∴ $\overline{\text{م س}} = \overline{\text{م ص}}$

ب- يمكنك أيضاً أن تثبت أنه :

إذا تساوى بعدا وترين من مركز الدائرة فإن طولي الوترين متساويان

مثال :

يتقاطع وتران متساويان داخل دائرة ، أثبت أن المستقيم الذي يصل نقطة تقاطعهما مع المركز ينصف الزاوية المحصورة بينهما .

الحل :

المعطيات :

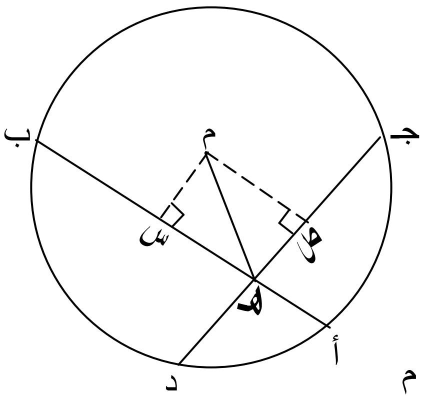
دائرة مركزها (م) ، الوتر $\overline{\text{أ ب}}$

والوتر $\overline{\text{جـ د}}$ متساويان ويتقاطعان في هـ .

المطلوب إثباته :

$\overline{\text{م هـ}}$ ينصف $\measuredangle$ ب هـ جـ

العمل :



أرسم $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ،

$\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ د}}$

البرهان :

في Δ هـ س م ، Δ هـ ص م

بما أن $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران متساويان **(معطى)**

$\therefore$ $\overline{\text{م س}}$ = $\overline{\text{م ص}}$ **(بعدا وترين متساويين)**

$\overline{\text{م هـ}}$ = $\overline{\text{م هـ}}$ **(مشترك)**

$\measuredangle$هـ س م = $\measuredangle$هـ ص م = ٩٠° **(بالعمل)**

$\therefore$ المثلثان متطابقان **(ض ، و ، ق)**

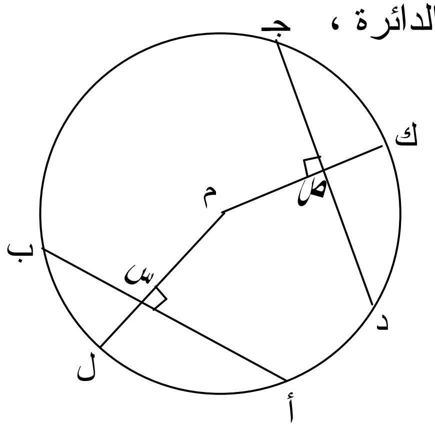
$\therefore$ $\measuredangle$م هـ س = $\measuredangle$م هـ ص

$\therefore$ م هـ ينصف $\measuredangle$س هـ ص

$\therefore$ م هـ ينصف $\measuredangle$ب هـ جـ

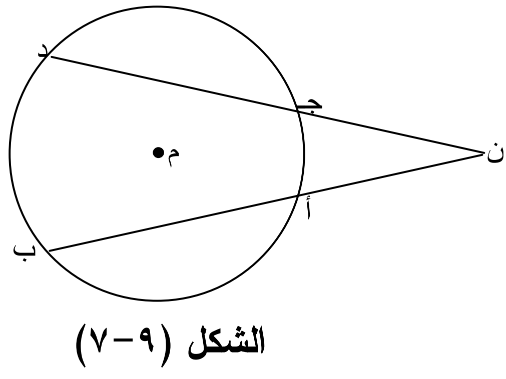
تمرين (٩–٣)

(١) في الشكل (٩–٦) المقابل م مركز الدائرة ،
أ ب ، جـ د وتران متساويان
م ل عمودي على أ ب في س
م ك عمودي على جـ د في ص
أثبت أن ل س = ك ص



الشكل (٩–٦)

(٢) من الشكل (٩–٧) التالي :
م مركز الدائرة ، أ ب ، جـ د وتران متساويان
أثبت أن ن أ = ن جـ
(ارشاد : ارسم الأعمدة من م على أ ب ، جـ د وصل ن م)



الشكل (٩–٧)

(٣) أ ب ، جـ د وتران متساويان يتقاطعان داخل الدائرة في زاوية قائمة ، اثبت أن نقطة التقاطع ومنتصفي الوترين ومركز الدائرة تكـــون رؤوس مربع .

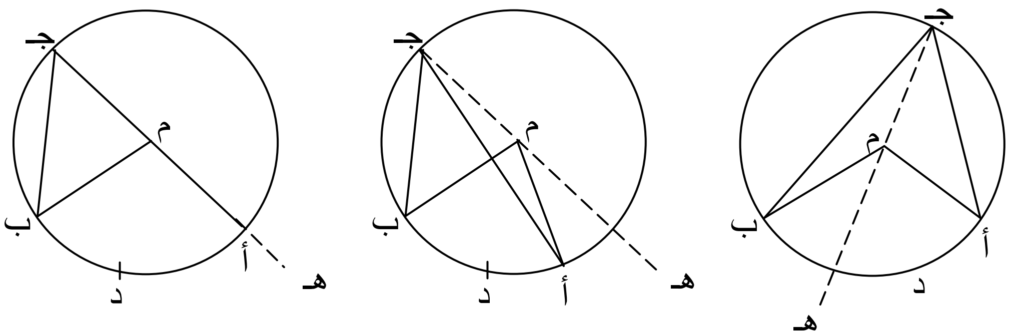
(٤) مد الوتران أ ب ، جـ د في دائرة مركزها م وتلاقيا في ن ، إذا كان المستقيم م ن ينصف ∢ ب ن د . أثبت أن :

أ ب = جـ د

الدرس السادس : الزوايا في الدائرة :

نظرية (٣) :

> **الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية المنشأة معها على القوس نفسه .**



الشكل (٩–٨)   الشكل (٩–٩)   الشكل (٩–١٠)

المعطى :

أ د ب قوس في دائرة مركزها م، جـ نقطة على باقي محيط الدائرة .

المطلوب إثباته :

∢ أ م ب = ٢ ∢ أ جـ ب

العمل :

صل جـ م ومده إلى هـ .

البرهان :

في الشكل (٩-٨) والشكل (٩-٩)

∠ م جـ أ = ∠ م أ جـ (زوايا قاعدة في ∆ متساوي الساقين)

∠ أ م هـ = ∠ م جـ أ + ∠ م أ جـ (خارجية في ∆ أ م جـ)

∴ ∠ أ م هـ = ٢ ∠ أ جـ م

بنفس الطريقة نجد أن ∠ ب م هـ = ٢ ∠ ب جـ م

بالجمع في شكل (٩-٨) وبالطرح في شكل (٩-٩) نجد أن :

∠ أ م ب = ٢ ∠ أ جـ ب

في الشكل (٩-١٠) نجد أن :

∠ ب = ∠ جـ (زاويتا قاعدة في ∆ متساوي الساقين)

∠ أ م ب = ∠ ب + ∠ جـ (خارجية في ∆ ب جـ م)

∠ أ م ب = ٢ ∠ جـ

∠ أ م ب = ٢ ∠ أ جـ ب

مثال (١) :

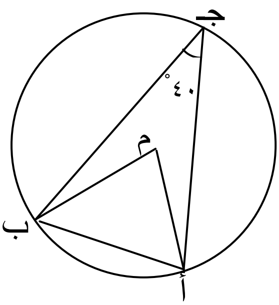
في الشكل (٩-١١) المقابل :

م مركز الدائرة ، ∠ أ جـ ب = ٤٠°

جد قيمة :

١- ∠ أ م ب

٢- ∠ أ ب م



الشكل (٩-١١)

الحل :

∠ أ م ب = ٢ ∠ أ جـ ب (مركزية ومحيطية على قوس واحد)

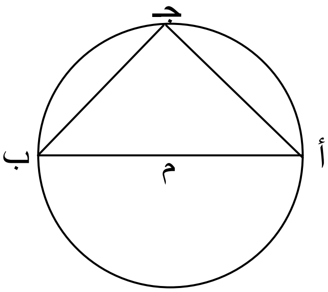
= ٢ × ٤٠° = ٨٠°

□ أ م ب متساوي الساقين

∠ أ ب م = ∠ ب أ م = $\frac{١٨٠-٨٠}{٢}$ = ٥٠°

نتيجة :

الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة قائمة .



المعطى :

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر لدائرة مركزها م ،

جـ نقطة على الدائرة .

المطلوب إثباته :

∠ أ جـ ب = ٩٠°

البرهان :

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر

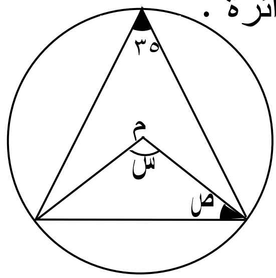
∴ ∠ أ م ب = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)

لكن ∠ أ جـ ب = $\frac{١}{٢}$ ∠ أ م ب (نظرية)

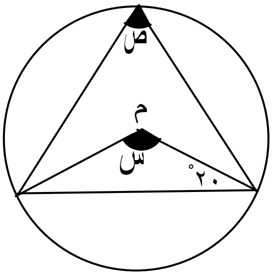
∴ ∠ أ جـ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٨٠ = ٩٠°

تمرين (٩–٤)

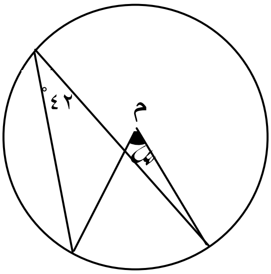
في الأشكال الآتية جد قيم الزوايا المشار إليها بحروف إذا كان م مركـــز الدائرة .



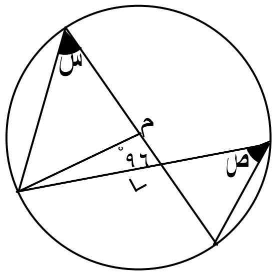
(١)



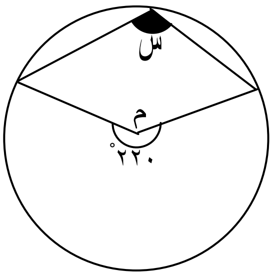
(٢)



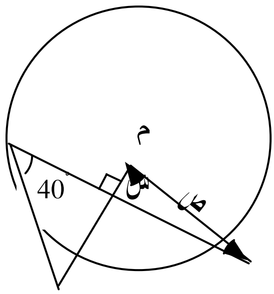
(٣)



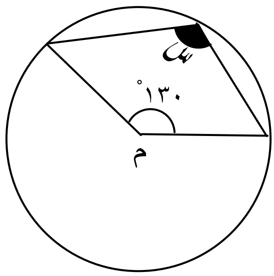
(٤)



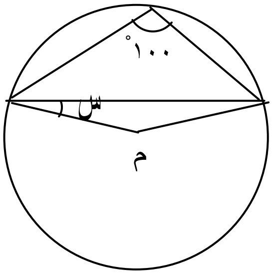
(٥)



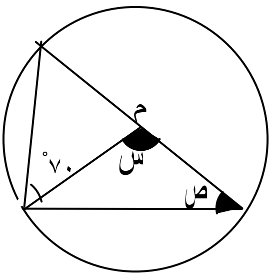
(٦)



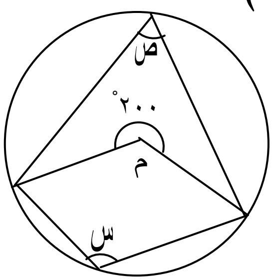
(٧)



(٨)



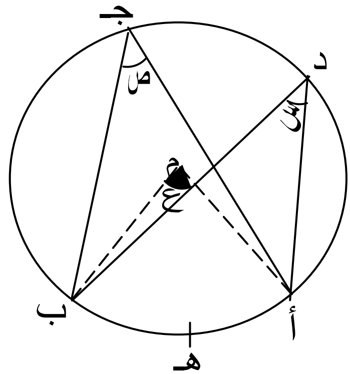
(٩)



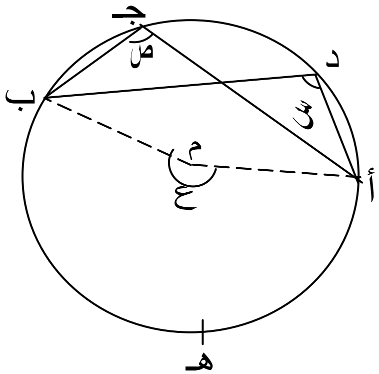
(١٠)

الدرس السابع : نظرية (٤) :

الزوايا المحيطية المنشأة على قوس واحد متساوية .



الشكل (٩–١٢)



الشكل (٩–١٣)

المعطيات :

∠ أ جـ ب ، ∠ أ د ب منشأتان على ⌒ أ هـ ب .

المطلوب إثباته :

∠ أ د ب = ∠ أ جـ ب

العمل :

صل $\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$

البرهان :

باستخدام الرموز الموضحة في الشكلين (٩–١٢) ، (٩–١٣)

ع = ٢س (مركزية ومحيطية على ⌒ أ هـ ب)

ع = ٢ص (مركزية ومحيطية على ⌒ أ هـ ب)

$\therefore$ ٢س = ٢ص

$\therefore$ س = ص

$\therefore$ ∢ أ د ب = ∢ أ جـ ب

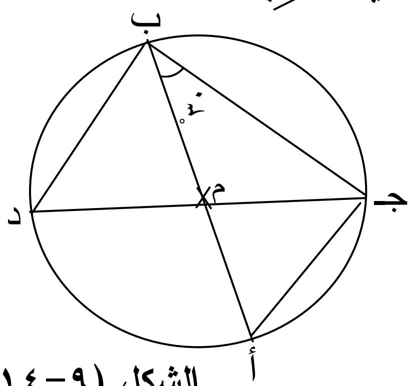
نتيجة :

الزوايا المحيطية المنشأة على الوتر في جهة واحدة متساوية .

مثال (١) :

في الشكل (٩–١٤) المقابل م مركز الدائرة ،

∢ أ ب جـ = ٣٠° ، أحسب قيمة ∢ ب د جـ



الشكل (٩–١٤)

الحل :

∢ أ ب جـ = ٣٠° (معطى)

∢ أ جـ ب = ٩٠° (محيطية على القطر)

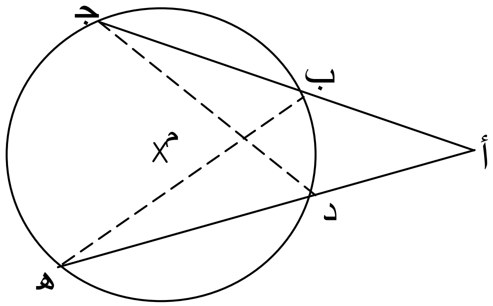
$\therefore$ ∢ ب أ جـ = ١٨٠ – (٩٠° + ٣٠°) (مجموع زوايا المثلث ١٨٠°)

= ٦٠°

$\therefore$ ∢ ب د جـ = ٦٠°

مثال (٢) :

أ نقطة خارج دائرة ، رسم منهـا القاطعـان أ ب جـ ، أ د هـ .
أثبت أن الزوايا المتناظرة في المثلثين أ ب هـ ، أ د جـ متساوية ؟



الشكل(٩–١٥)

الحل :

في Δ أ ب هـ ، Δ أ د جـ

$\sphericalangle$ أ هـ ب = $\sphericalangle$ أ جـ د

(محيطتان على قوس واحد)

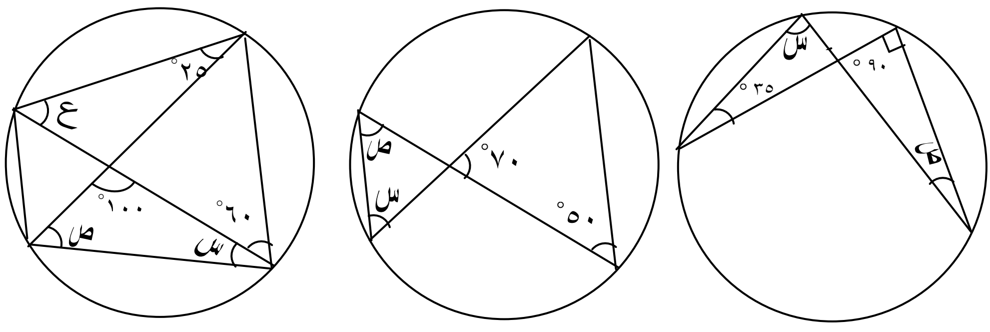
$\sphericalangle$ب أ هـ = $\sphericalangle$د أ جـ (الزاوية نفسها)

$\therefore$ $\sphericalangle$أ ب هـ = $\sphericalangle$ أ د جـ (الزاوية الثالثة في المثلث)

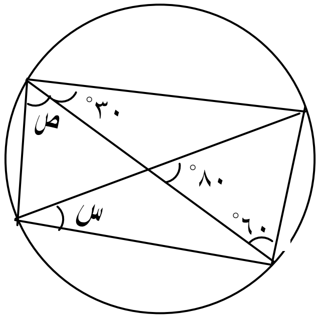
$\therefore$ الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية .

تمرين (٩–٥)

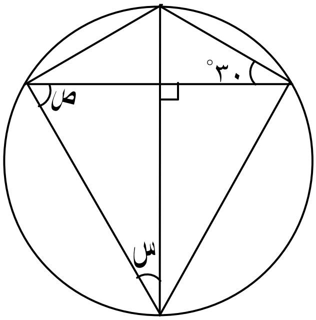
(أ) جد قيم الزوايا المشار إليها بحروف في الأشكال التالية :



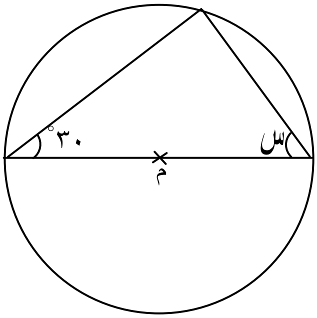
(١) (٢) (٣)



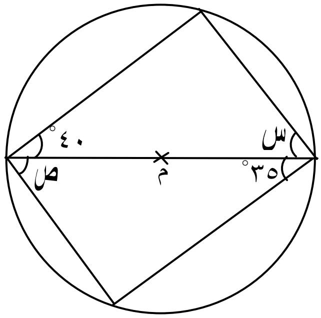
(٤)



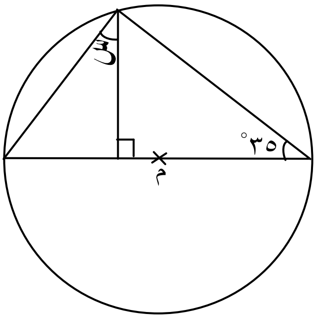
(٥)



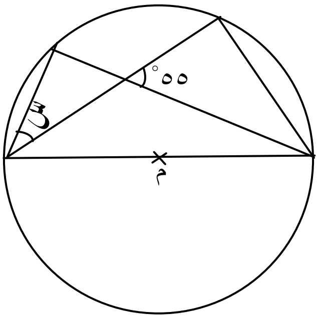
(٦)



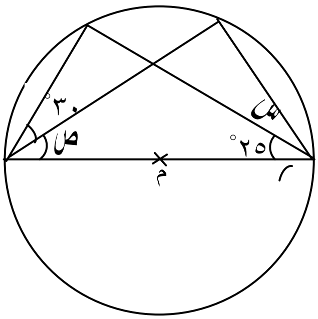
(٧)



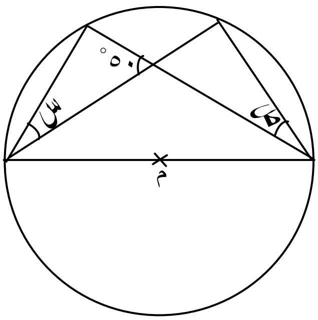
(٨)



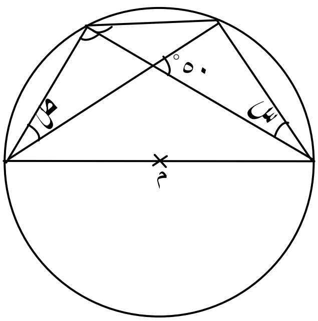
(٩)



(١٠)



(١١)



(١٢)

(ب) أ ب ، جـ د وتران متقاطعان في نقطة هـ داخل الدائرة ، أثبت أن الزوايا المتناظرة في المثلثين أ هـ جـ ، د هـ ب متساوية .

(ج) دائرة مركزها م . النقطة أ ، ب ، جـ ، على الدائرة حيث أ ب = أ جـ ، ∢ ب أ جـ = ٥٠° ، وصل جـ م ومد حتى لاقي الدائرة في د . جد قيمة ∢ ب د جـ ∢ أ ب د

الدرس الثامن : الرباعي الدائري :

تعريف :

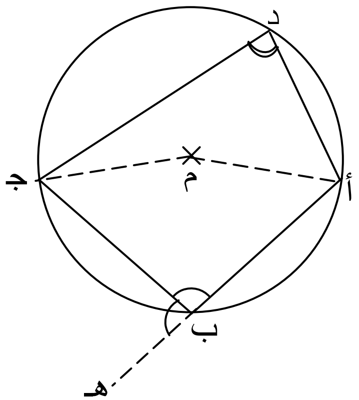
الشكل الرباعي الذي تقع رؤوسه الأربعة على الدائرة يسمى رباعياً دائرياً .

نظرية (٦) :

في الرباعي الدائري :

١. كل زاويتين متقابلتين متكاملتان .

٢. الزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة للمجاورة لها .



المعطيات :

دائرة مركزها م ، أ ب جـ د رباعي دائري .

المطلوب إثباته :

١/ ∠ أ ب جـ + ∠ أ د جـ = ١٨٠°

٢/ ∠ هـ ب جـ = ∠ أ د جـ

العمل :

صل أ م ، جـ م ، مد أ ب إلى هـ

البرهان :

∠ أ م جـ = ٢ ∠ أ د جـ (مركزية ومحيطية على قوس واحد)

∠ أ م جـ (المنعكسة) = ٢ ∠ أ ب جـ (مركزية ومحيطية على قوس واحد)

∴ ∠ أ م جـ + ∠ أ م جـ (المنعكسة) = ٣٦٠° (مجموع الـــزوايا المتجمعة في نقطة)

∴ ٢ (∠ أ د جـ + ∠ أ ب جـ) = ٣٦٠°

∴ ∠ أ د جـ + ∠ أ ب جـ = ١٨٠° وهو مطلوب أولاً .

∠ هـ ب جـ + ∠ أ ب جـ = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)

∴ ∠ أ د جـ + ∠ أ ب جـ = ∠ هـ ب جـ + ∠ أ ب جـ

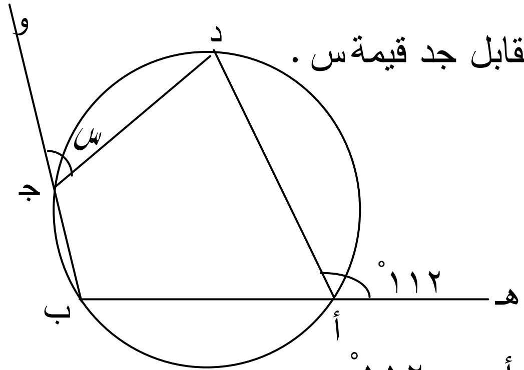
∠ هـ ب جـ = ∠ أ د جـ وهو المطلوب ثانياً

نتيجة :

إذا كان مجموع الزاويتين المتقابلتين في الشكل الربـــاعي ١٨٠° كان الشكل رباعياً دائرياً .

مثال (١) :

في الشكل (٩-١٦) المقابل جد قيمة س .



الشكل (٩-١٦)

الحل :

∠ب جـ د = ∠هـ أ د = ١١٢°

(خارجية وداخلية مقابلة)

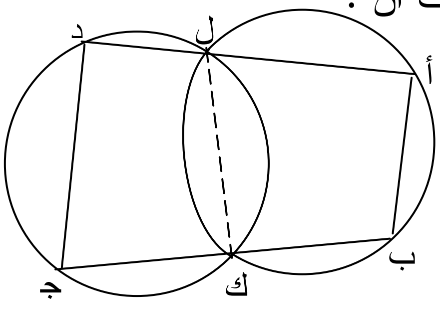
∠ب جـ د + س = ١٨٠° (زاويا مستقيمة)

∴ س = ١٨٠° - ١١٢° = ٦٨°

مثال (٢) :

في الشكل (٩-١٧) المقابل أثبت أن :

أ ب // د جـ



الشكل (٩-١٧)

الحل :

∠ب أ ل + ∠ب ك ل = ١٨٠° (متقابلتان في رباعي دائري)

∠ب ك ل = ∠جـ د ل (خارجية وداخلية مقابلة)

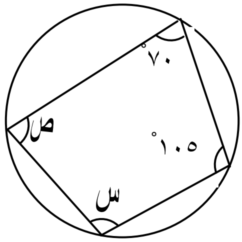
∴ ∠ب أ ل + ∠جـ د ل = ١٨٠°

ولكن ∠ب أ ل ، ∠جـ د ل (داخليتان وعلى وجهة واحدة من أ د)

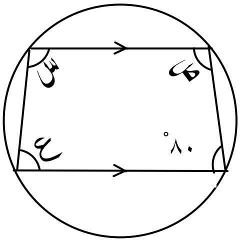
∴ أ ب // د جـ

تمرين (٩–٦)

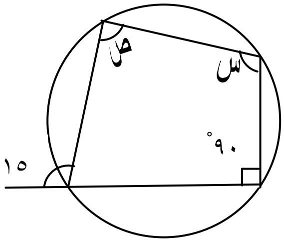
١/ في الأشكال الآتية جد قيم الزوايا المشار إليها بحروف :



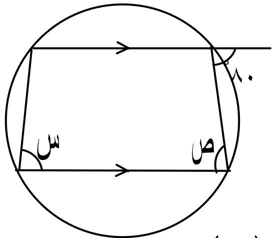
(أ)



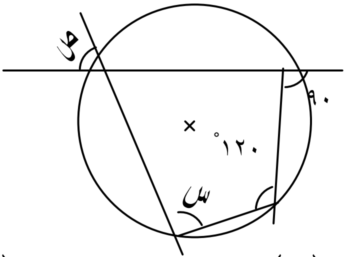
(ب)



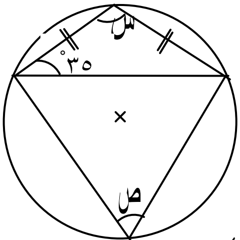
(جـ)



(د)



(هـ)



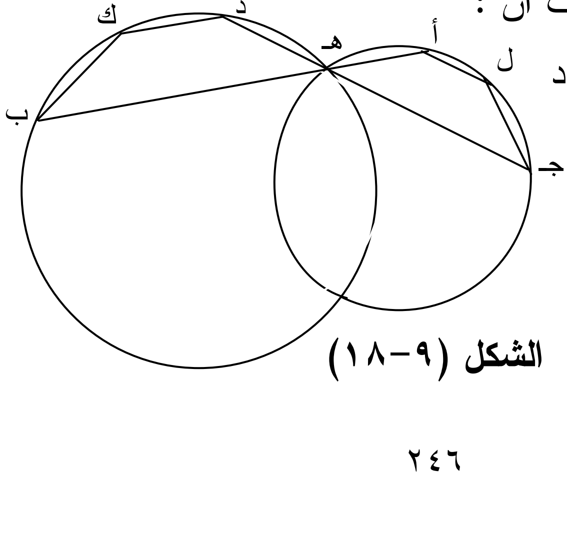
(و)

٢/ أ ب جـ د رباعي دائري فيه ∠أ = ٦٠° ، مد $\overline{\text{ب جـ}}$ إلى هـ حيث $\overline{\text{جـ هـ}}$ = $\overline{\text{جـ د}}$. أثبت أن :

∆ جـ د هـ متساوي الأضلاع .

٣/ في الشكل (٩–١٨) أثبت أن :

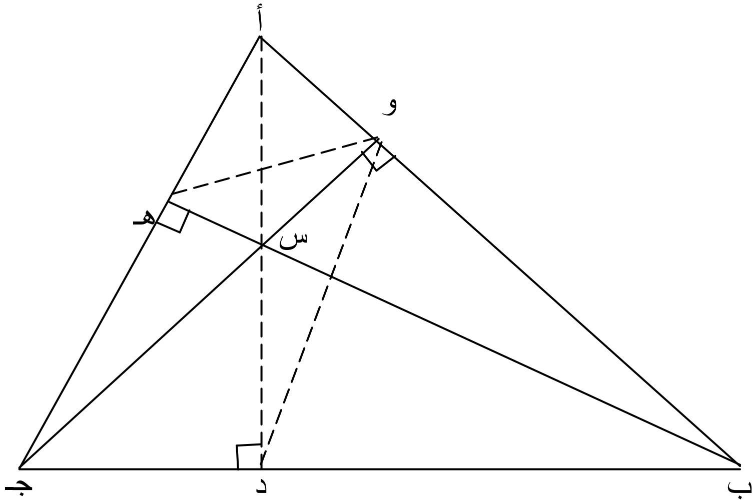
∠أ ل جـ = ∠ب ك د



الشكل (٩–١٨)

الدرس التاسع : تمرين مشهور

ارتفاعات المثلث تتقاطع في نقطة واحدة .



المعطيات : ∆ أ ب جـ الارتفاعات ب هـ ، جـ و يتقاطعان في س .

المطلوب إثباته : ارتفاعات المثلث تتقاطع في نقطة واحدة .

العمل : صل أ س ، ثم مده ليلاقي ب جـ في د ، صل و هـ ، و د .

البرهان : في الشكل أ و س هـ :

∠ أ و س = ٩٠° ، ∠ أ هـ س = ٩٠° (معطى)

∴ ∠ أ و س + ∠ أ هـ س = ١٨٠° وهما متقابلتان .

∴ الشكل أ و س هـ رباعي دائري .

∴ ∠ و هـ س = ∠ و أ س (محيطتان على قوس واحد) (١)

∴ ∠ ب و جـ = ٩٠° ، ∠ ب هـ جـ = ٩٠°

∴ ∠ ب و جـ = ∠ ب هـ جـ ، وهما على جهة واحدة من ب جـ .

∴ الشكل ب جـ هـ و رباعي دائري .

∴ ∠و هـ ب = ∠و جـ ب (محيطتان على قوس واحد) (٢)

من (١) و (٢) نجد أن :

∠و جـ ب = ∠و أ س

∴ ∠و جـ د = ∠و أ د وهما على جهة واحدة من $\overline{\text{و د}}$

∴ الشكل أ و د جـ رباعي دائري

∴ ∠أ و جـ = ∠أ د جـ

ولكن ∠أ و جـ = ٩٠° (معطى)

∴ ∠أ د جـ = ٩٠°

∴ $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

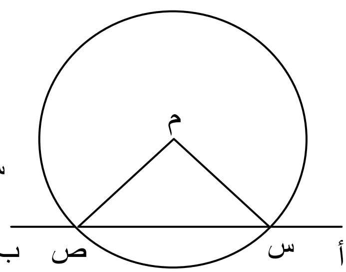
∴ $\overline{\text{أ د}}$ هو الارتفاع الثالث

الارتفاع الثالث يمر بنقطة تقاطع الارتفاعين الآخرين .

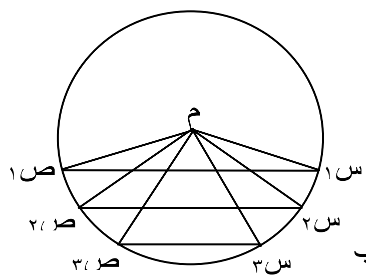
∴ ارتفاعات المثلث تتقاطع في نقطة واحدة .

الدرس العاشر : مماس الدائرة :

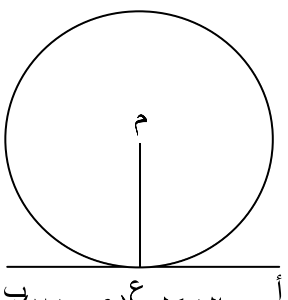
تمهيد وتعريف :



الشكل (٩-١٩)



الشكل (٩-٢٠)



الشكل (٩-٢١)

في الشكل (٩–١٩) المستقيم أ ب يقطع الدائرة في س ، ص وعليه نجد أن :

بعد مركز الدائرة من أي نقطة على القاطع بين س ، ص أقل من نصف قطر الدائرة .

Δ م س ص متساوي الساقين .

$\therefore$ $\angle$م س ص = $\angle$م ص س (زاويتا قاعدة في مثلث متساوي الساقين) .

$\therefore$ $\angle$أ س م = $\angle$ب ص م (مكملتان لزاويتين متساويتين)

وكلما تحرك المستقيم بعيداً عن م شيئاً فشيئاً سيقل البعد بين س ، ص كما في الشكل (٩–٢٠) حتى ينطبق م $\overline{\text{س}}$ على م $\overline{\text{ص}}$ وتنطبق س ص في النقطة ع كما في الشكل (٩–٢١) .

بما أن $\angle$ أ س م ، $\angle$ب ص م متساويتان فإن $\angle$ أ ع م ، $\angle$ب ع م متساويتان ومجموعهما ١٨٠° .

$\therefore$ $\angle$ أ ع م = $\angle$ب ع م = ٩٠° .

$\therefore$ $\overline{\text{م ع}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

$\therefore$ في هذا الوضع الأخير يسمى المستقيم أ ب **مماساً للدائرة** ، لأنه لا يقطع الدائرة ، وإنما يمسها في نقطة واحدة تسمى **نقطة التماس** .

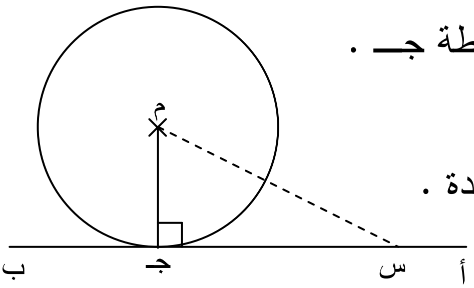
نظرية (٧) :

المستقيم الذي يرسم عمودياً على نصف قطر في نهايته ، يمس الدائرة في نقطة واحدة .

المعطى :

دائرة مركزها م ، م جـ نصف قطر ،

أب مستقيم ⊥ م جـ عند النقطة جـ .



المطلوب إثباته :

أ ب يمس الدائرة في نقطة واحدة .

العمل :

خذ س أي نقطة على أ ب ثم صل س م .

البرهان :

في $\triangle$ س جـ م ، ∢س جـ م = ٩٠° (معطى)

∴ م س > م جـ (الوتر أكبر أضلاع المثلث القائم)

∵ م جـ نصف قطر

∴ م س > نصف القطر

∴ س تقع خارج الدائرة

وهكذا نجد أن أي نقطة على أ ب باستثناء جـ تقع خارج الدائرة .

∴ المستقيم أ ب يمس الدائرة في نقطة واحدة .

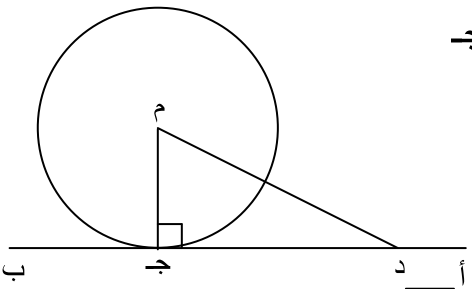
الدرس الحادي عشر :

> **الزاوية المحصورة بين المماس ونصف قطر الدائرة الذي يمر بنقطة التماس زاوية قائمة .**

المعطى :

دائرة مركزها م ، $\overline{\text{م جـ}}$ نصف قطر ،

$\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة في جـ



المطلوب إثباته :

$\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ في جـ

العمل :

خذ أي نقطة مثل د على $\overline{\text{أ ب}}$ ، ثم صل $\overline{\text{م د}}$

البرهان :

بما أن $\overline{\text{أ ب}}$ يمس الدائرة في جـ .

∴ كل نقطة على المماس باستثناء جـ تقع خارج الدائرة .

∴ د تقع خارج الدائرة .

∴ $\overline{\text{م د}}$ أكبر من نصف القطر $\overline{\text{م جـ}}$

أو $\overline{\text{م جـ}}$ أصغر من $\overline{\text{م د}}$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$\overline{\text{م جـ}}$ أصغر من أي مستقيم واصل من المركز م إلى أي نقطة على $\overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{م جـ}}$ أقصر المستقيمات من م إلى $\overline{\text{أ ب}}$

$\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

نتيجة (١) :

من أي نقطة على محيط الدائرة لا يمكن رسم أكثر من مماس واحد لتلك الدائرة .

نتيجة (٢) :

العمود المقام على مماس دائرة من نقطة التماس يمر بمركز الدائرة .

مثال :

أ نقطة خارج دائرة مركزها م ، رسم المستقيم أ ب جـ يمر بالمركز م ويقطع الدائرة في ب ، جـ رسم من أ المستقيم أ س يمس الدائرة في س ، وصل $\overline{\text{ب س}}$ ، $\overline{\text{جـ س}}$.

أثبت أن : ∢ أ س ب = ∢ م س جـ

الحل :

المعطيات :

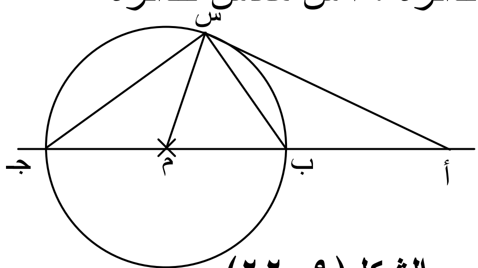
في الشكل **(٩–٢٢)** م مركز الدائرة ، $\overline{\text{أ س}}$ مماس للدائرة

المطلوب إثباته :

∢ أ س ب = ∢ م س جـ

العمل :

صل $\overline{\text{م س}}$



الشكل(٩–٢٢)

البرهان :

∵ $\overline{\text{أ س}}$ مماس ، $\overline{\text{م س}}$ نصف قطر

∴ ∢ أ س م = ٩٠° (نظرية)

∵ $\overline{\text{ب جـ}}$ قطر

∴ ∢ ب س جـ = ٩٠° (محيطية مرسومة على القطر)

∴ ∢ أ س م = ∢ ب س جـ

بطرح ∢ ب س م من الطرفين نجد أن :

∢ أس م − ∢ ب س م = ∢ ب س جـ − ∢ ب س م

∴ ∢ أ س ب = ∢ م س جـ

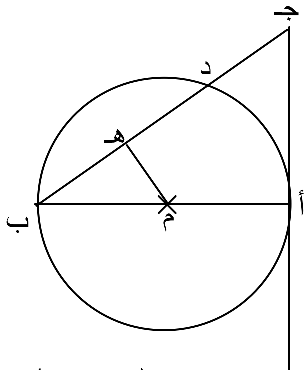
تمرين (٩–٧)

١/ في الشكل (٩–٢٣) المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر لدائرة مركزها م ، $\overline{\text{أ جـ}}$ مماس

في أ ، هـ منتصف $\overline{\text{ب د}}$.

أثبت أن : الشكل أ م هـ جـ رباعي دائري .



الشكل (٩–٢٣)

٢/ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة ، رسم المماسان جـ أ د ، هـ ب و في أ ، ب

أثبت أن $\overline{\text{جـ د}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$.

٣/ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في دائرة مركزها م ، ∢ م أ ب = ٣٥° رسم مماس في أ

ومماس في ب وتلاقيا في جـ ، جد قيمة زاوية أ جـ ب .

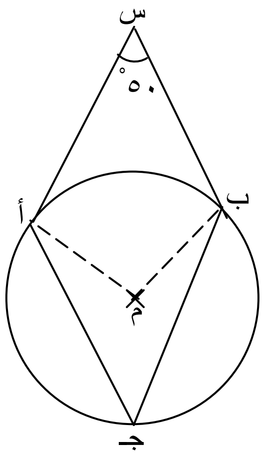
٤/ في الشكل (٩–٢٤) المقابل :

س أ ، س ب مماسان لدائرة مركزها م ،

∠ أ س ب = ٥٠°

١. أثبت أن س ب م أ رباعي دائري .

٢. جد قيمة ∠ أ جـ ب



الشكل (٩–٢٤)

الدرس الثاني عشر : نظرية (٩) :

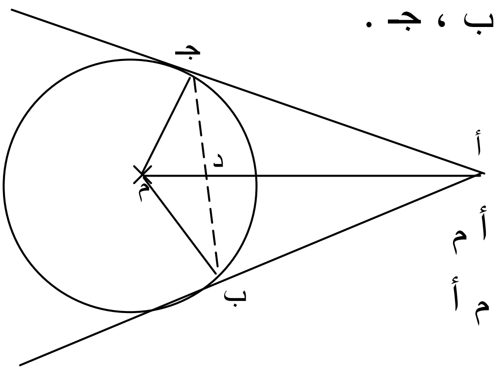
> **إذا رسم مماسان لدائرة من نقطة خارجها فإن :**
>
> **١– المماسين متساويان .**
>
> **٢– المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلى نقطة تقاطع المماسين ينصف الزاوية المحصورة بينهما .**
>
> **٣– المماسين يقابلان زاويتين متساويتين عند مركز الدائرة .**

المعطيات :

دائرة مركزها م ، أ ب ،

أ جـ مماسان للدائرة في ب ، جـ .

المطلوب إثباته :



(١) أ ب = أ جـ

(٢) ∠ ب أ م = ∠ جـ أ م

(٣) ∠ ب م أ = ∠ جـ م أ

البرهان :

في Δ أ ب م ، Δ أ جـ م :

ب م = جـ م (نصفا قطرين)

أ م (مشترك)

∠ أ ب م = ∠ أ جـ م = ٩٠° (محصورة بين مماس ونصف قطر)

∴ المثلثان متطابقان (ض ، و ، ق)

∴ أ ب = أ جـ ------------ (١)

∴ ∠ ب أ م = ∠ جـ أ م ------------ (٢)

∴ ∠ ب م أ = ∠ جـ م أ ------------ (٣)

نتيجة

> **المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلى نقطة تقاطع مماسين لها يكون عمودياً على الوتر الواصل بين نقطتي التماس وينصفه .**
>
> **(يمكن أثبات ذلك بتطابق Δ م ب د ، Δ م جـ د)**

مثال :

في الشكل (٩ – ٢٥) المقابل :

أ ، ب ، جـ ، د نقاط على الدائرة .

رسمت للدائرة مماسات عندها فتقاطعت عند النقط س ،ص ، ع ،ل

أثبت أن :

س ص + ع ل = ل س + ع ص

الحل :

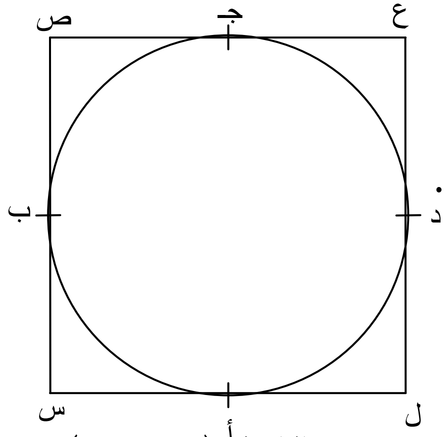
المعطيات :

ل س ، س ص ، ص ع ، ع ل

مماسات للدائرة في أ ، ب ، جـ ، د .

المطلوب إثباته :

س ص + ع ل = ل س + ع ص



الشكل (٩ – ٢٥)

البرهان :

س ب = س أ (مماسان من نقطة واحدة)

ص ب = ص جـ (مماسان من نقطة واحدة)

ع د = ع جـ (مماسان من نقطة واحدة)

ل د = ل أ (مماسان من نقطة واحدة)

بالجمع :

س ب + ص ب + ع د + ل د = س أ + ص جـ + ع جـ + ل أ

∴ س ص + ع ل = ل س + ع ص

تمرين (٩–٨)

١/ في الشكل (٩–٢٦) المقابل :

أ ب ، أ جـ مماسان لدائرة مركزها م

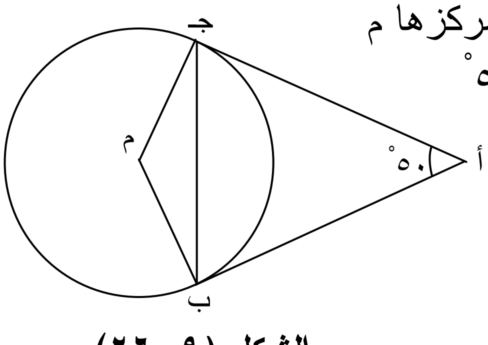
إذا كانت ∠ ب أ جـ = ٥٠°

جد :

١– ∠ أ ب جـ

٢– ∠ جـ ب م

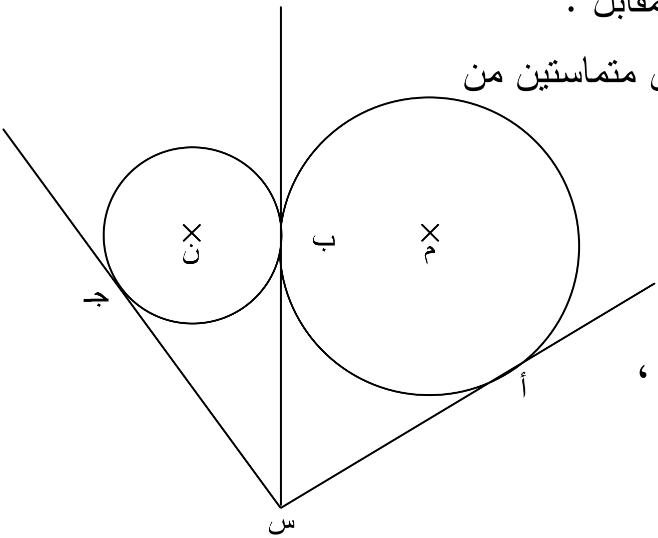
٣– ∠ ب م جـ



الشكل (٩–٢٦)

٢/ في الشكل (٩–٢٧) المقابل :

س نقطة خارج دائرتين متماستين من الخارج في ب .



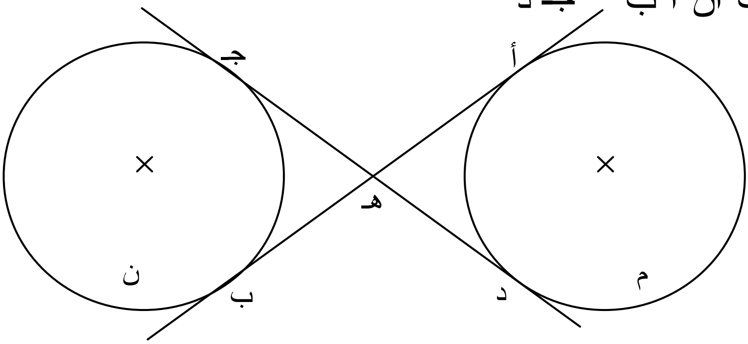
$\overline{\text{س أ}}$ ، $\overline{\text{س ب}}$ ، $\overline{\text{س جـ}}$ ، مماسات في أ ، ب ، جـ

أثبت أن : $\overline{\text{أ س}}$ = $\overline{\text{جـ س}}$

الشكل (٩–٢٧)

٣/ في الشكل (٩–٢٨) $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ مماسان للدائرتين ويتقاطعان في هـ .

أثبت أن $\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{جـ د}}$



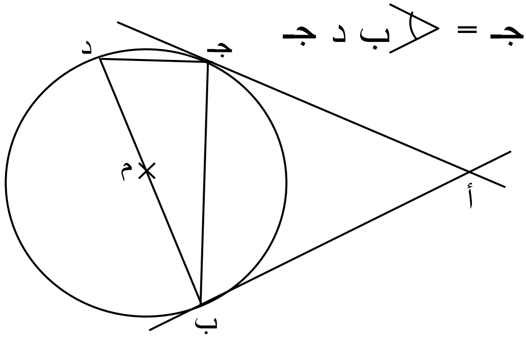
الشكل (٩–٢٨)

٤/ دائرة نصف قطرها ٥سم ، جد على أي بعد من مركزها يمكن وضع نقطة بحيث يكون طول كل من المماسين المرسومين منها في الدائرة يساوي ١٢سم .

٥/ في الشكل (٩–٢٩) أدناه :

$\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ مماسان لدائرة مركزها م أثبت أن :

∢ أ ب جـ = ∢ ب د جـ



الشكل (٩–٢٩)

٦/ أ ب ، جـ د مماسان متوازيان لدائرة مركزها م قطعهما مماس ثالث في هـ ، و أثبت أن :

∢ هـ م و = ٩٠°

الدرس الثالث عشر :

نظرية (١٠) :

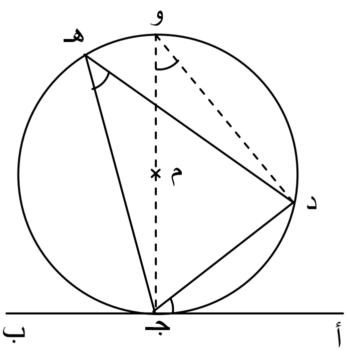
الزاوية المحصورة بين المماس لدائرة والوتر المار بنقطة التماس تساوي الزاوية المحيطية المقابلة لهذا الوتر من الجهة الأخرى .

المعطيات :

$\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة التي مركزها م في جـ ،

$\overline{\text{جـ د}}$ وتر فيها .

المطلوب إثباته :



∢ أ جـ د = ∢ جـ هـ د .

العمل :

صل $\overline{\text{جـ م}}$ ثم مده حتى يلاقي الدائرة في و ، صل $\overline{\text{د و}}$.

البرهان :

∢ جـ د و = ٩٠° (محيطية على القطر $\overline{\text{جـ و}}$)

∴ ∢ د جـ و + ∢ د و جـ = ٩٠°

∢ أ جـ و = ٩٠° (محصورة بين مماس ونصف قطر)

∴ ∢ أ جـ د + ∢ د جـ و = ٩٠°

∴ ∢ أ جـ د + ∢ د جـ و = ∢ د و جـ + ∢ د جـ و

وبطرح ∢ د جـ و من الطرفين نجد أن :

∢ أ جـ د = ∢ د وجـ

ولكن ∢ د و جـ = ∢ جـ هـ د (محيطتان على قوس واحد)

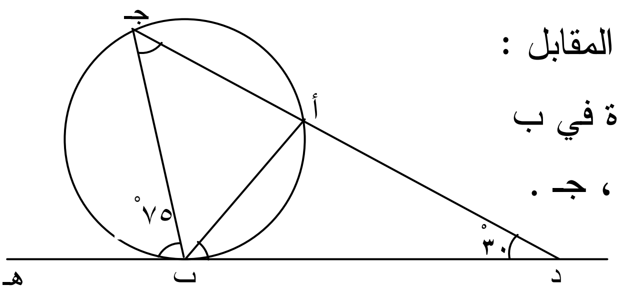
∴ ∢ أ جـ د = ∢ جـ هـ د

مثال :

في الشكل (٩–٣٠) المقابل :

د ب هـ مماس لدائرة في ب

$\overline{\text{د جـ}}$ قاطع لها في أ ، جـ .



(الشكل ٩–٣٠)

جد قيمة :

١- ∢ أ ب د

٢- ∢ أ جـ ب

الحل :

∢ب أ جـ = ∢هـ ب جـ = ٧٥° (نظرية)

ولكن ∢ب أ جـ = ∢أ د ب + ∢أ ب د (خارجية في Δ أ ب د)

∴ ∢ أ ب د = ∢ب أ جـ - ∢ أ د ب

= ٧٥° - ٣٠° = ٤٥°

∢أ جـ ب = ∢أ ب د (نظرية)

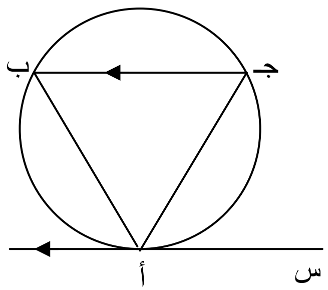
∴ ∢ أ جـ ب = ٤٥°

تمرين (٩-٩)

١/ في الشكل (٩-٣١) إذا كان المماس س أ // الوتر $\overline{\text{جـ ب}}$

أثبت أن :

∢أ ب جـ = ∢أ جـ ب



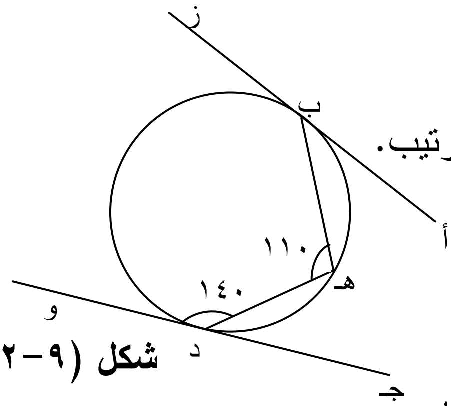
الشكل (٩-٣١)

٢/ في الشكل (٩-٣٢) المقابل أ ز ،

جـ و مماسان في ب ، د على الترتيب.

جد قيمة ∢ أ ب هـ .

(إرشاد صل ب د)



شكل (٩-٣٢)

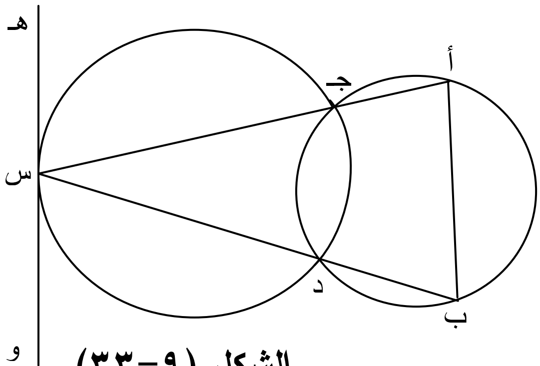
٣/ في الشكل (٩-٣٣) المقابل دائرتان

متقاطعتان في جـ ، د ،

هـ س و مماس في س

أثبت أن : أ ب // هـ س و

(إرشاد : صل جـ د)



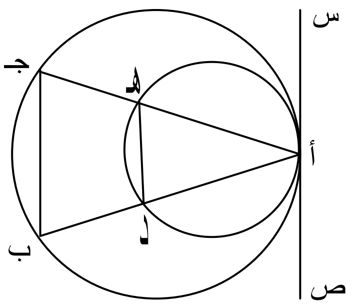
الشكل (٩-٣٣)

٤/ في الشكل (٩-٣٤) المقابل :

س أ ص مماس للدائرتين في أ .

أثبت أن :

د هـ // ب جـ

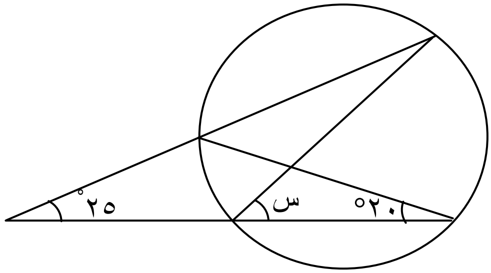


الشكل (٩-٣٤)

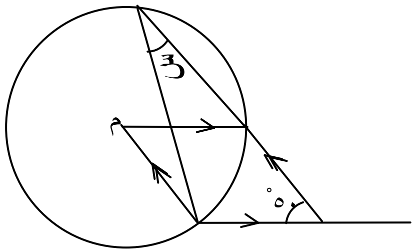
٥/ أ ب ، ب جـ ، جـ أ أوتار متساوية في دائرة . المماسان في ب ، جـ يتلاقيان في هـ ، أثبت أن Δ ب جـ هـ متساوي الأضلاع .

تمرين عام

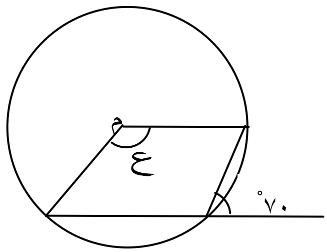
(١) جد قيم الزوايا المشار إليها بحروف (م مركز الدائرة)



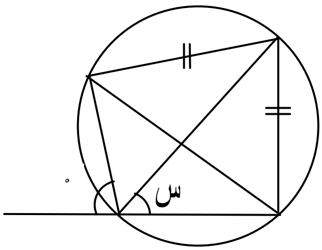
(أ)



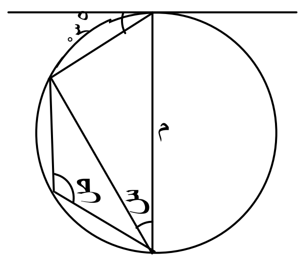
(ب)



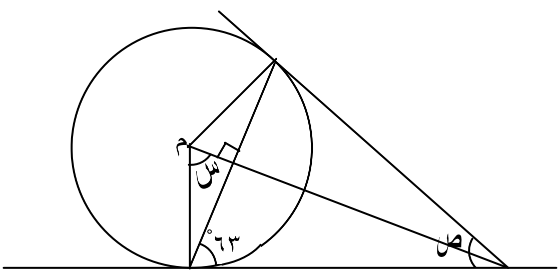
(جـ)



(د)



(هـ)



(و)

(٢) أ ب قطر في دائرة مركزها م ، ب جـ وتر ، م د عمود على ب جـ في د ، أثبت أن م د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

(٣) ل منتصف الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ في دائرة مركزها م ، ك نقطة على امتداد $\overline{\text{م ل}}$ ،

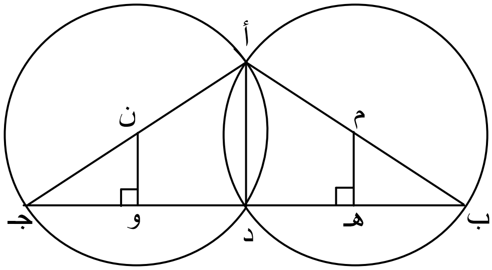
أثبت أن $\overline{\text{ل ك}}$ ينصف ∠ أ ك ب .

(٤) في الشكل (٩-٣٥) المقابل :

م ، ن هما مركزا الدائرتين

أثبت أن :

$\overline{\text{م هـ}}$ = $\overline{\text{ن و}}$



الشكل (٩-٣٥)

(٥) أ ، ب ، جـ نقاط على محيط دائرة ، المماس في أ يقطع امتداد

$\overline{\text{ب جـ}}$ في د ، أثبت أن :

∠ ب أ د = ∠ أ جـ د

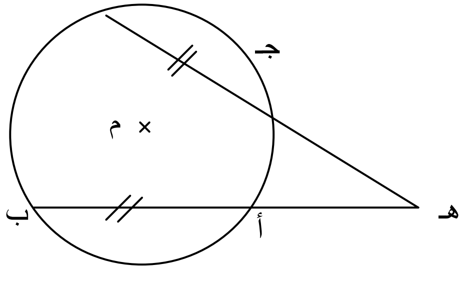
(٦) م هي نقطة تقاطع الارتفاعات في Δ أ ب جـ حاد الزوايا أثبت أن :

∠ ب م جـ + ∠ ب أ جـ = ١٨٠°

(٧) في الشكل (٩-٣٦) المقابل :

إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{جـ د}}$ أثبت أن :

$\overline{\text{هـ أ}}$ = $\overline{\text{هـ جـ}}$



الشكل (٩-٣٦)

الوحدة العاشرة

الإحصاء

تمرين مراجعة

(١) أنشئ جدولاً تكراريا للبيانات الآتية :

٢٥ ١٥ ٣٠ ١٥ ٥ ٣٠ ٢٥ ١٥ ١٠ ٢٠

١٠ ١٥ ٢٥ ٣٠ ١٥ ١٠ ٥ ٣٠ ٢٥ ٣٠

١٥ ٣٠ ٣٥ ٢٥ ٣٥ ٢٥ ١٥ ١٠ ٢٠ ٣٠

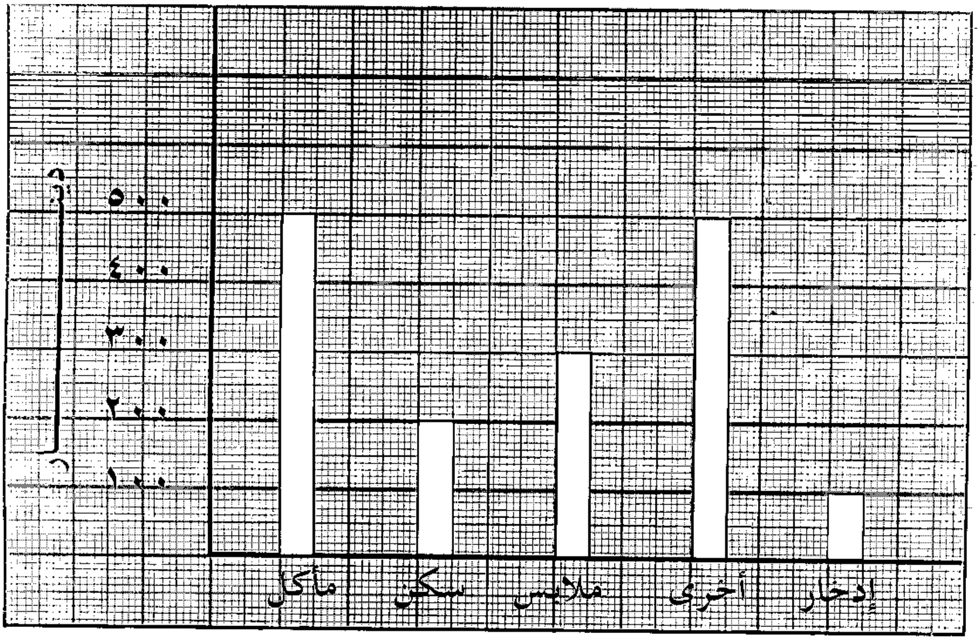
٢٥ ٣٥ ٣٠ ٢٠ ٥ ١٠ ١٥ ١٥ ٣٠ ٥

ومن ثم أرسم رسماً بيانياً بالأعمدة للجدول الذي أنشأته .

(٢) مثل بيانياً بطريقة القطاعات الدائرية الجدول التكراري الآتي :

الدرجات	التكرارات
١٠	٥
٢٠	١٧
٣٠	١٥
٤٠	٢٠
٥٠	٣

(٣) الرسم البياني يوضح توزيع دخل الأسرة على بنود صرف متعددة أدرس الرسم البياني الآتي وكون جدولاً تكرارياً له .



الدرس الأول : الجدول التكراري ذو الفئات :

الفئات :

أحياناً يتعذر وضع البيانات في جدول تكراري بسيط كما درسنا في الصف السابع خاصة إذا كثر عدد مفردات البيانات . ذلك لأنه في هذه الحالة يزيد عدد القيم بحيث يتعذر إنشاء جدول يحدد فيه تكرار كل قيمة من هذه القيم الكثيرة .

ويقتضي الأمر في هذه الحالة أن نضعها في مجموعات فمثلاً في البيانات التالية وهي درجات تلميذات في امتحان لمادة الرياضيات لصف من الصفوف (درجته القصوى ٥٠ درجة)

٣٠	٣١	٤٢	٤٠	٤٢	٢٧	٣٣	٣١	٢٢	٣١
٣٢	١٥	١٧	٢٢	٢٠	٢١	١٧	١٩	٢١	٣٧
٣٩	٤٢	٤٧	٤٩	٤٨	٢١	١٣	٣٧	٢٢	١١
١٣	١٧	٣٠	٢٠	١٧	٥	٣	١٩	٣١	٤
٧	١٩	٩	٣٠	١١	٩	٣٧	٤٢	٤٧	٨
٣٩	١٠								

- كم تلميذة أحرزت ٠ وأقل من ٥ ؟
- كم تلميذة أحرزت ٥ وأقل من ١٠ ؟
- كم تلميذة أحرزت ١٠ وأقل من ١٥ ؟

لاحظ أن التلميذة التي أحرزت ٥ درجات تنتــمي للمجموعة (٥ وأقل من ١٠) ولا تنتمي للمجموعة (٠ وأقل من ٥)

- إلى أي مجموعة تنتمي درجات التلميذة التي أحرزت ١٠ درجات ؟

كل من المجموعات (٠ واقل من ٥) أو (٥ وأقل من ١٠) أو (١٠ وأقل من ١٥) تسمى فئة ، وأن لكل فئة حداً أدنى وحداً أعلى ، فالصفر هو الحد الأدنى للفئة (٠ وأقل من ٥) .

والخمسة هي الحد الأدنى للفئة (٥ وأقل من ١٠) والعشرة حــدها الأعلى . نلاحظ أن الحد الأدنى ينتمي للفئة ، بينما لا ينتمي الحد الأعلى لها .

- ما الحد الأدنى والحد الأعلى للفئة (٢٠ وأقل من ٢٥) ؟

صور أخرى لكتابة الفئات

يمكن كتابة الفئة (١٠ وأقل من ٢٠) بالطرق الآتية :

(١) (١٠ – ٢٠) وتقرأ ١٠ وأقل من ٢٠ .

(٢) (١٠ –) والتالية لها (٢٠ –) وتقرأ ١٠ وأقل من ٢٠ .

(٣) (١٠ – ١٩) والتالية لها (٢٠ – ٢٩) وتقرأ من ١٠ إلـــى ١٩ ومن ٢٠ إلى ٢٩ وهكذا .

مدى الفئة :

المسافة أو الفرق بين الحد الأعلى للفئة ، والحد الأدنى للفئة نفسها يسمى : مدى الفئة أو طول الفئة .

مثلاً :

طول الفئة (١٥ وأقل من ٢٠) = ٢٠ – ١٥ = ٥

- ما مدى الفئة (٢٠ وأقل من ٣٠) ؟

مدى الفئة = الحد الأعلى للفئة – الحد الأدنى

مركز الفئة :

منتصف مدى الفئة يسمى مركز الفئة .

مثلاً :

مركز الفئة (١٠ وأقل من ٢٠) =

$$\frac{١٠ + ٢٠}{٢} = ١٥$$

أي أنّ :

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة + حدها الأعلى}}{٢}$$

طريقة أخرى :

$$\text{مركز الفئة (١٠ وأقل من ٢٠)} = ١٠ + \frac{٢٠ - ١٠}{٢}$$

$$= ١٠ + ٥ = ١٥$$

أي أنّ :

$$\frac{\text{طول الفئة}}{٢}$$

ونعتبر أن مركز الفئة يمثل كل بيانات الفئة التي ينتمي لها ، فمثلاً إذا كانت ٧ ، ٣ ، ٤ ، ٢ درجات تلاميذ تنتمي للفئة (٠ وأقل من ١٠) فإن مركز الفئة هو ٥ . فيمكننا أن نعتبر أن كلاً من التلاميذ الأربعة كأنما قد أحرز ٥ درجات تقريباً .

المدى :

- ما أكبر درجة أحرزت في البيانات السابقة ؟
- ما أصغر درجة أحرزت في البيانات السابقة ؟
- ما الفرق بين أكبر درجة أحرزت وأصغر درجة أحرزت ؟

الفرق بين أكبر بيان واصغر بيان يسمى **المدى** أي أنّ :

المدى = أكبر مفردة – أصغر مفردة

من البيانات السابقة : المدى = ٤٩ – ٣ = ٤٦

تمرين (١٠–١)

(١) ما طول (مدى) كل من الفئات : (٠ وأقل من ٢) ، (١٠ وأقل من ١٥) ، (٤ وأقل من ١١) .

(٢) ما الحد الأدنى والحد الأعلى للفئات في السؤال (١) ؟

(٣) ما مركز كل فئة من الفئات المذكورة في السؤال (١) ؟

(٤) البيانات التالية درجات تلاميذ صف من الصفوف في امتحان درجته القصوى ٥٠ درجة :

٣٠	٣	١٥	١٧	٣٥	٢٧	٢٠	٣٣	٤٥	٣٧
١٧	١٩	١٥	١٠	٧	٥	٣	٣٥	٣٧	٣٩
٤٥	٤٧	٢١	٣٣	٢٥	٤٩	٤١	٤٠	٣٠	١٠
١٥	١٠	٢٥	١٣	٢٠	١٥	٣٥	٤٥	٢٧	١٣
٥	٩	١١	١٤	٣١	٢٢	٣٧			

أ / كم عدد التلاميذ الذين أحرزوا درجات تنتمي للفئة (٠ وأقل من ١٠) ؟

ب/ كم عدد التلاميذ الذين أحرزوا درجات تنتمي للفئة (١٠ وأقل من ٢٠) ؟

جـ/ كم عدد التلاميذ الذين أحرزوا درجات تنتمي للفئة (٢٠ وأقل من ٣٠) ؟

د / ما هو مدى البيانات السابقة ؟

الدرس الثاني : وضع البيانات الإحصائية في جدول تكراري ذي فئات :

لإنشاء جدول تكراري للبيانات :

٣٠	٣١	٤٢	٤٠	٤٢	٢٧	٣٣	٣١	٢٢	٣١	٣٢
١٥	١٧	٢٢	٢٠	٢١	١٧	١٩	٢١	٣٧	٣٩	٤٢
٤٧	٤٩	٤٨	٢١	١٣	٣٧	٢٢	١١	١٣	١٧	٣٠
٢٠	١٧	٠٥	٠١	١٩	٣١	٠٤	٠٧	١٩	٠٩	٣٠
١١	٠٩	٣٧	٤٢	٤٧	٠٨	٣٩	١٠			

نتبع هذه الخطوات :

١- نبحث عن أكبر مفردة وأصغر مفردة في البيانات وهما ٤٩ ، ١

٢- يعين المدى

المدى = أكبر مفردة – أصغر مفردة = ٤٩ – ١ = ٤٨

٣- تحديد طول مدى الفئة :

وذلك بتقسيم المدى على عدد مناسب من الفئات . وهذا العدد من الفئات نختاره كما نشاء . فإذا أردنا أن نقسم البيانات السابقة إلى عشر فئات فأن مدى الفئة = $\frac{٤٨}{٥}$ ≃ ٥ فتكون الفئات (٠ وأقل من ٥) و(٥ وأقل من ١٠) ...

أكمل بقية الفئات . وإذا أردنا أن نقسم البيانات السابقة إلى خمس فئات فأن مدى الفئة = $\frac{٤٨}{٥}$ ≃ ١٠ ، وتكون الفئات (٠ – ١٠) ، (١٠ – ٢٠) ، (٢٠ – ٣٠) ... أكمل بقية الفئات .

٤- نأخذ البيانات واحدة بعد الأخرى ، ونضع كل واحدة في الفئة التي تنتمي لها . ويستحسن تمثيل كل واحدة بعلامة مثل (/) ويجب الاحتياط من إغفال واحدة من البيانات أو تكرارها ثم تمثل

هذه الفئات في جدول تكراري كالآتي :

خذ عدد الفئات ١٠

جدول تكراري لتوزيع ٥٢ تلميذاً

الفئـــــــات	المفردات الواقعة فيها	العدد (التكرارات)
٠- ٥	//	٢
٥-١٠	~~////~~	٥
١٠-١٥	~~////~~	٥
١٥-٢٠	~~////~~///	٨
٢٠-٢٥	~~////~~ ///	٨
٢٥-٣٠	/	١
٣٠-٣٥	~~////~~////	٩
٣٥-٤٠	~~////~~	٥
٤٠-٤٥	~~////~~	٥
٤٥-٥٠	////	٤

لو أخذنا عدد الفئات ٥ بدلاً عن ١٠ فئات كما في الجدول السابق يكون الجدول التكراري كالآتي :

الفئات	المفردات الواقعة فيها	العدد (التكرارات)
٠-	~~////~~//	٠٧
١٠-	~~////~~ ~~////~~ ///	١٣
٢٠-	~~////~~ ////	٩
٣٠-	~~////~~ ~~////~~ ////	١٤
٤٠-	~~////~~ ////	٠٩

بمقارنة الجدولين التكراريين السابقين :

- ماذا تلاحظ في عدد فئات الجدولين ؟
- ماذا تلاحظ في عدد تكرارات الجدولين ؟
- ماذا تلاحظ عن طول فئات هذين الجدولين ؟
- هل أطوال فئات كل جدول متساوية ؟

هذا النوع من الجداول **يسمى الجداول التكرارية ذات الفئات متساوية الطول** . وستقتصر دراستنا على هذا النوع من الجداول .

كلما كان عدد التكرارات كبيراً لكل فئة كان الجدول أكثر فائدة من حيث تسهيل المجتمع الإحصائي .

مثال :

أنشئ جدولاً تكرارياً للبيانات التالية ، وهي درجات صف من الصفوف في امتحان للغة الإنجليزية (درجته القصوى ٥٠)

٣٠	٣١	٤٢	٤٠	٤٢	٢٧	٣١	٢٢	٣١	٢٣
١٥	١٧	٢٢	٢١	٢٠	١٧	١٩	٢١	٣٧	٣٩
٠٢	٤٧	٤٩	٤٨	٢١	١٣	٣٧	٢٢	١١	١٣
١٧	٣٠	٢٠	١٧	٠٥	٠٣	١٩	٣١	٠٤	٠٧
١٩	٠٩	٣٠	١١	٠٩	٣٧	٤٢	٤٧	٠٨	٣٩

مستعيناً بالجدول التكراري الذي أنشأته أجب على التالي :

١- كم تلميذاً أحرز أقل من ٣٠ درجة ؟

٢- كم تلميذاً أحرز ٣٠ درجة فأكثر ؟

٣- إذا كانت درجة النجاح ٢٠ . كم تلميذ نجح ؟ كم تلميذاً رسب ؟

كم عدد تلاميذ الفصل ؟

الحل :

المدى = أكبر بيان – أصغر بيان

= ٤٩ – ٣ = ٤٦

مدى الفئة (طول الفئة) = $\frac{٤٦}{١٠} \simeq ٥$

(لاحظ أننا اخترنا عدد الفئات وهو ١٠ بمحض أرادتنا)

جدول تكراري يوضح توزيع درجات ٥٠ تلميذاً في مادة اللغة الإنجليزية

الفئات	المفردات الواقعة فيها	العدد (التكرارات)
٠- ٥	//	٢
٥-١٠	$\cancel{////}$	٥
١٠-١٥	////	٤
١٥-٢٠	$\cancel{////}$///	٨
٢٠-٢٥	$\cancel{////}$///	٨
٢٥-٣٠	/	١
٣٠-٣٥	$\cancel{////}$///	٨
٣٥-٤٠	$\cancel{////}$	٥
٤٠-٤٥	$\cancel{////}$	٥
٤٥-٥٠	////	٤

(١) ٢٨ تلميذاً .

(٢) ٩ تلاميذ .

(٣) عدد الناجحين ٣١ تلميذاً ، والذين رسبوا ١٩ تلميذاً .

(٤) عدد تلاميذ الفصل = ٥٠ تلميذاً .

تمرين (١٠-٢)

(١) البيانات الآتية درجات عدد من الممتحنين في امتحان اللغة العربية (درجته القصوى ١٠٠)

٣٧	١٣	٤١	٩١	٧٣	٩٣	٢٨	٥٤	٥٣	٧٨
٣٧	٥٢	٩١	٣١	٣٧	٣٢	٨٢	١٨	٧٧	٩٣
٧٢	١٧	٩٨	٦٧	٦١	١١	٩٩	٣٧	١٧	٥٥
٢٢	٩٢	٨٧	٦٣	١٣	٨٨	٢٣	٤٧	٣٧	١٤
٤١	٨٣	٧١	٦٢	٧٥	١١	٧٤	٩٩	١٢	٧٧
٨٣	٧١	٦٦	١٤	٩٩	٨١	١٢	٢٣	٨٧	١٧
٤٩	٠١	٩٩							

(أ) ما أكبر درجة أحرزت ؟

(ب) ما أصغر درجة أحرزت ؟

(جـ) كم يساوي المدى ؟

(د) إذا قسمت المدى إلى ٢٠ فئة ، فكم طول الفئة بالتقريب لأقرب عدد صحيح ؟

(هـ) خذ عدد الفئات = ١٠ وأنشئ جـــدولاً تكراريـــاً يوضـــح توزيـــع الدرجات السابقة .

(٢) الجدول التكراري الآتي يوضح توزيع أعمار تلاميذ مدرسة بمرحلة التعليم الأساسي :

الفئات	**التكرارات**
٠٦ – ٠٩	١٢٠
٠٩ – ١٢	١٥٢
١٢ – ١٥	١١٨
١٥ – ١٨	١٤٠

مستعيناً بهذا الجدول أجب عن الآتي :

(أ) كم عدد فئات هذا الجدول ؟ وكم طول الفئة ؟

(ب) ما مركز الفئة (١٢ – ١٥) ؟

(٣) فيما يأتي درجات تلاميذ أحد الفصول وعددهم ٣٦ تلميذاً في اختبار لمادة الرياضيات ، كوّن جدولاً تكرارياً مناسباً لهذه البيانات :

٧٣	٤٥	٥٣	٢٢	١٠	٢٧
٢١	٣١	٣٩	٤٧	٦٢	٥٠
٤١	٥٢	٥٢	٥٤	٤٤	٦٤
٥١	٦٣	٧١	٩٧	٧٥	٨٢
٥٩	٣٣	٥٦	٨٥	٦٧	٣٨
١٩	٥٦	٥٧	٦٥	٦٨	٧٠

(٤) أنشئ جدولاً تكرارياً للبيانات الآتية :

٤٤	٥٤	٨٥	٩٢	٧٣	٥٧	٩٩	٧٤	٦٤	٨٣
٥٩	٦٢	٦٤	٦٧	٨٣	٨٢	٩٠	٧٠	٥٢	٧٠
٧٢	٥٧	٦٥	٧٩	٨٢	٨٩	٥٣	٥٢	٩١	٧٥
٤٩	٥٠	٧٣							

أجعل مدى كل فئة ٥ وأبدأ من ٤٠

(٥) البيانات الآتية أعمار بعض المزارعين في مشروع من المشاريع الزراعية :

٦١	٥٢	٥٢	٨٢	٥٠	٧١	٨٢	٥٤	٩٠	٦١
٥٩	٧٥	٩٠	٨٧	٩٢	٨٤	٦٣	٦٤	٦٣	٧٦
٨٢	٦١	٩١	٧١	٧٦	٥٢	٧٣	٧١	٨٧	٥٩

أنشئ جدولاً تكرارياً ذا فئات ، يوضح توزيع هذه البيانات .

الدرس الثالث : تمثيل البيانات الإحصائية بيانياً :

عرفنا في الصف السابع أن البيانات الإحصائية تمثل بيانياً بإحدى الطرق الآتية :

١. التمثيل بالجداول التكرارية .
٢. التمثيل بالصور .
٣. التمثيل بالأعمدة .
٤. التمثيل بالدائرة .

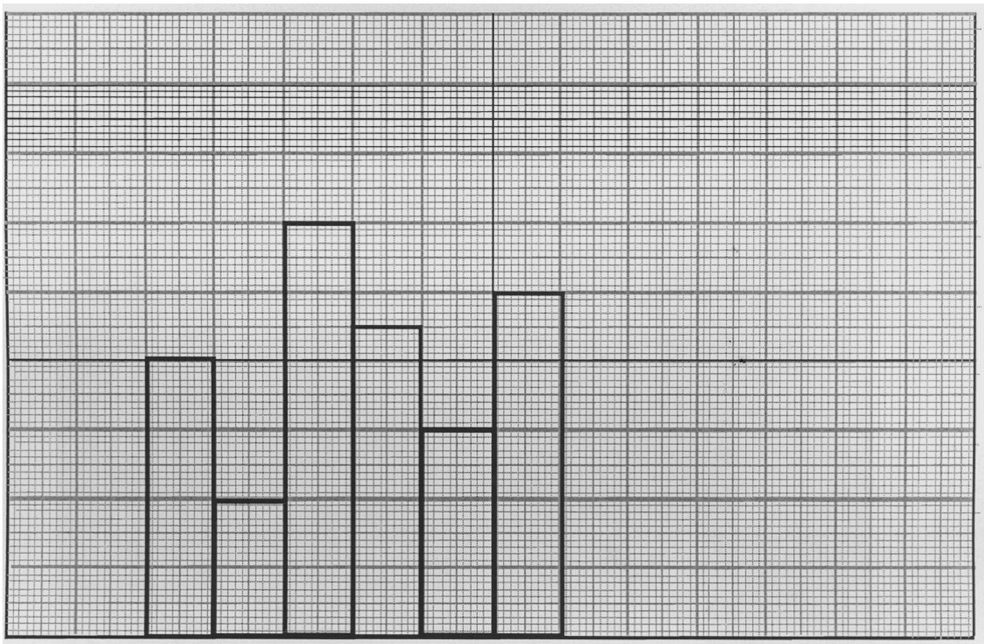
وسوف نتعرض هنا لكيفية تمثيل البيانات بطريقتين اخريتين هما :

أولاً : التمثيل بالمدرج التكراري .

ثانياً : التمثيل بالمضلع التكراري .

أولاً : تمثيل البيانات الإحصائية باستخدام المدرج التكراري :

المدرج التكراري هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة أنظر الشكل (١٠-١)



الشكل (١٠-١) المدرج التكراري

مثال توضيحي :

الجدول التكراري الآتي يوضح درجات ٤٠ تلميذاً في امتحان لمادة الرياضيات درجته القصوى ١٠٠ درجة .

الفئات	التكرار
٦٠-	١
٦٥ -	٣
٧٠ -	٦
٧٥ -	١٢
٨٠ -	٨
٨٥ -	٥
٩٠ -	٣
٩٥ -	٢
المجموع	٤٠

إذا أردت أن تمثل الجدول التكراري السابق بمدرج تكراري (تمثيل بالأعمدة الرأسية المتجاورة) نتبع الخطوات الآتية :

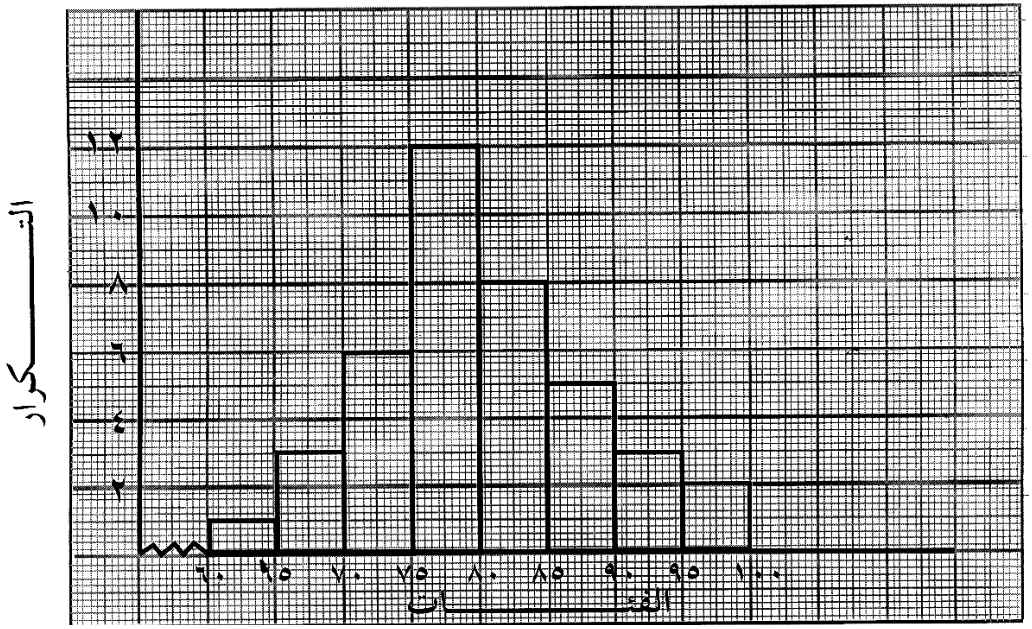
١- حدد طول الفئة .

طول الفئة في هذا المثال = ٦٥ - ٦٠ = ٥

٢- مثّل الفئات متجاورة على المحور الأفقي (السيني) ومثل التكرارات على المحور الرأسي (الصادي) .

٣- أرسم المستطيلات الرأسية (الأعمدة) والتي سيكون عرض كـل منها = طول الفئة وطول كل منها = التكرار .

٤- ما دامت الأعمدة المرسومة متلاصـقة فالنـاتج هـو المـدرج التكراري الذي يمثل البيانات الإحصائية سابقة الذكر كمـا هـو موضح في الشكل (١٠-٢)



الشكل (١٠-٢)

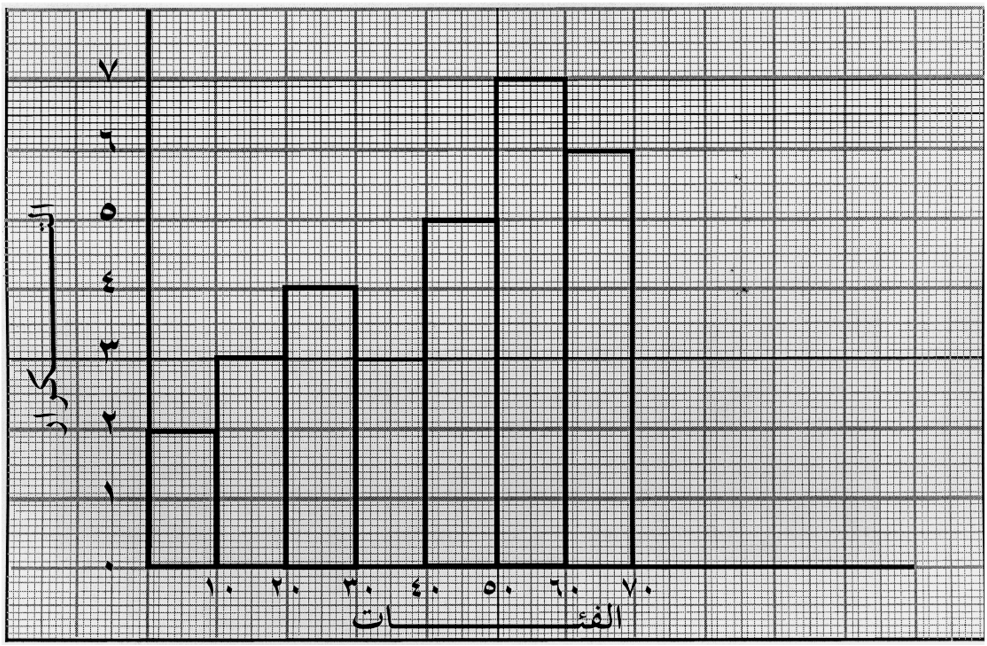
الخط المنكسر يعني أنه ليس هنالك تلميذاً أحرز أقل من ٦٠ درجة، وأن مقياس الرسم للفئات ١سم ≡ ٥ وحدات لا ينطبق على المسافة مـن نقطة الأصل إلى النقطة التي تمثل الحد الأدنى وهو ٦٠ درجة .

مثال :

أرسم مدرجاً تكرارياً للجدول التكراري الآتي :

الفئات	٠ –	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	٦٠ –
التكرار	٢	٣	٤	٣	٥	٧	٦

الحل :



الشكل (١٠–٣)

تمرين (١٠-٣)

(١) أرسم مدرجاً تكرارياً لكل من الجداول التكرارية الآتية :

(أ)

الفئات	التكرار
٠ - ١٥	١٠
١٥ – ٣٠	٠٦
٣٠ – ٤٥	٠٨
٤٥ – ٦٠	١٣
٦٠ – ٧٥	٠٤

(ب)

الفئات	التكرار
٤٠ –	٢
٤٥ –	١
٥٠ –	٢
٥٥ –	١
٦٠ –	٦
٦٥ –	٤
٧٠ –	٦
٧٥ –	٩
٨٠ –	٠
٨٥ –	٦

(ج)

الفئات	٠ –	٥ –	١٠ –	١٥ –	٢٠ –	٢٥ –	٣٠ –	٣٥ –
التكرار	٥	١٠	٢٥	٠	٣٠	٢٥	٥	١٥

(د)

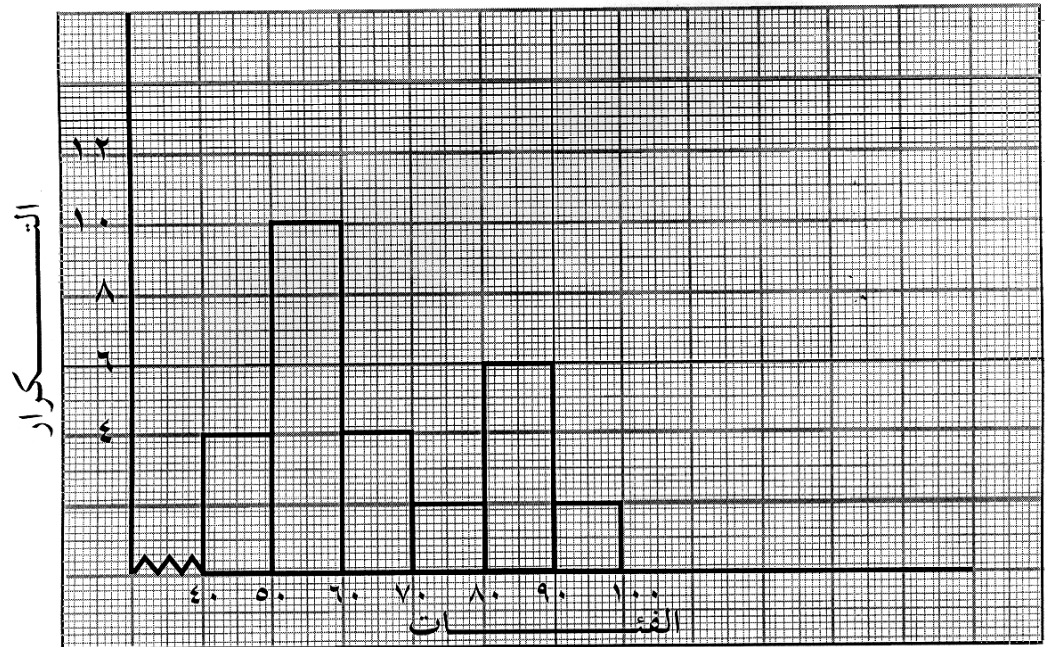
الفئات	٤٤ –	٤٩ –	٥٤ –	٥٩ –	٦٤ –	٦٩ –	٧٤ –	٧٩ –
التكرار	٤٥	٣٧	٢٢	١٥	١١	٨	٧	٥

(٢) جمع ٣٠ كشافاً مبلغاً من المال بغرض تشجير قريتهم ، والمبالغ التي جمعها كل واحد منهم (بآلاف الجنيهات)

١٥	١٩	٢٥	١١	٢٢	١٧	٥	٢٠	٣٠	٢٥
٠٨	٠٤	٠١	٣١	١٣	٠١	١٠	٢١	٢٥	٣٠
١٤	٢٧	٣٤	٢٩	١٢	٣٤	١٥	٢٠	٢٧	١٠

أرسم مدرجاً تكرارياً يوضح هذه البيانات .

(٣) المدرج التكراري أدناه يوضح توزيع درجات تلاميذ في مادة الرياضيات درجته القصوى ١٠٠ درجة .



الشكل (١٠-٤)

من المدرج التكراري بالشكل (١٠-٤) أجب عن الآتي :

(أ) ما تفسيرك للخط المتكسر في الرسم ؟

(ب) كم عدد فئات الجدول التكراري الذي رسم منه هذا المدرج التكراري ؟

(جـ) ما الحد الأدنى والحد الأعلى لكل فئة ؟

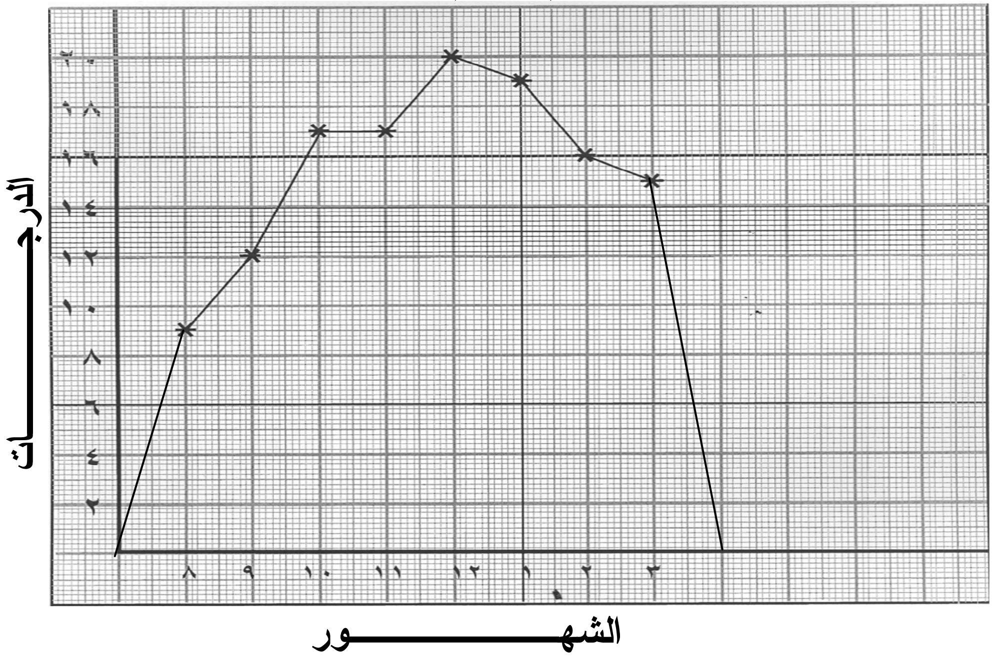
(د) جد طول كل فئة .

(هـ) كم عدد التلاميذ الذين ينتمون للفئة (٥٠ - ٦٠) ؟

(و) كون الجدول التكراري الذي رسم منه هذا المدرج .

الدرس الرابع : تمثيل البيانات الإحصائية باستخدام المضلع التكراري :

الشكل (١٠–٥) الآتي يوضح تمثيل درجات أحد الطلاب في امتحان مادة الرياضيات الشهري درجته القصوى ٢٠ درجة على مدار شهور العام الدراسي . وذلك باستخدام ما يعرف بالمضلع التكراري وفيه مثلنا شهور الاختبارات على المحور الأفقي (السيني) والدرجات على المحور الراسي (الصادي) ومثلنا النقاط التي احداثياتها السينية الشهور واحداثياتها الصادية الدرجات التي أحرزت في امتحان ذلك الشهر ثم وصلنا بينها بقطع مستقيمة حسب ترتيبها . ومن المتبع عادة أن يستكمل المضلع بتوصيل النقطتين عند الطرفين بالمحور الأفقي على مسافة تبعد بمقدار طول فئة واحدة . الشكل (١٠–٥) .



الشكل (١٠–٥)

بدراسة هذا المضلع التكراري نلاحظ :

١. أصغر درجة حصل عليها هذا الطالب هي ٩ درجات وقد حصل عليها في شهر أغسطس .
٢. أكبر درجة حصل عليها هي .... وحصل عليها في شهر ديسمبر .
٣. لم يحصل على درجة أصغر من ٩ وحصل على الدرجة الكاملة مرة واحدة .

أدرس الرسم وأجب عن الآتي :

١. في أي شهر حصل التلميذ على ١٦ درجة ؟
٢. ما درجة التلميذ في امتحان شهر يناير ؟
٣. بماذا تفسر القطعة المستقيمة الأفقية من المضلع ؟
٤. هل تحسن التلميذ في دراسته للرياضيات في الفترة من أغسطس إلى أكتوبر ؟

المضلع التكراري السابق رسم لجدول تكراري ليس ذي فئات .

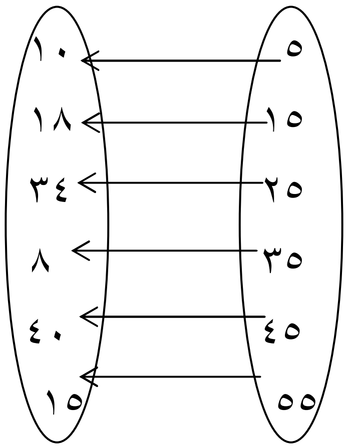
أما إذا كان الجدول التكراري ذا فئات فإن المضلع التكراري له ينتج عن القطع المستقيمة التي تصل النقاط التي احداثياتها السينية مراكز الفئات واحداثياتها الصادية تكرار الفئات حسب ترتيبها .

إذا أخذت الجدول التكراري الآتي وأردت تمثيل البيانات فيه بمضلع تكراري فأتبع الخطوات الآتية :

١- عين مراكز الفئات :

المراكز هي ٥ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥ ، ٤٥ ، ٥٥

الفئات	التكرارات
٠ -----	١٠
١٠ ----	١٨
٢٠-----	٣٤
٣٠ -----	٨
٤٠ -----	٤٠
٥٠ -----	١٥



(أ)   مجموعة مركز الفئات (ب) مجموعة التكرارات

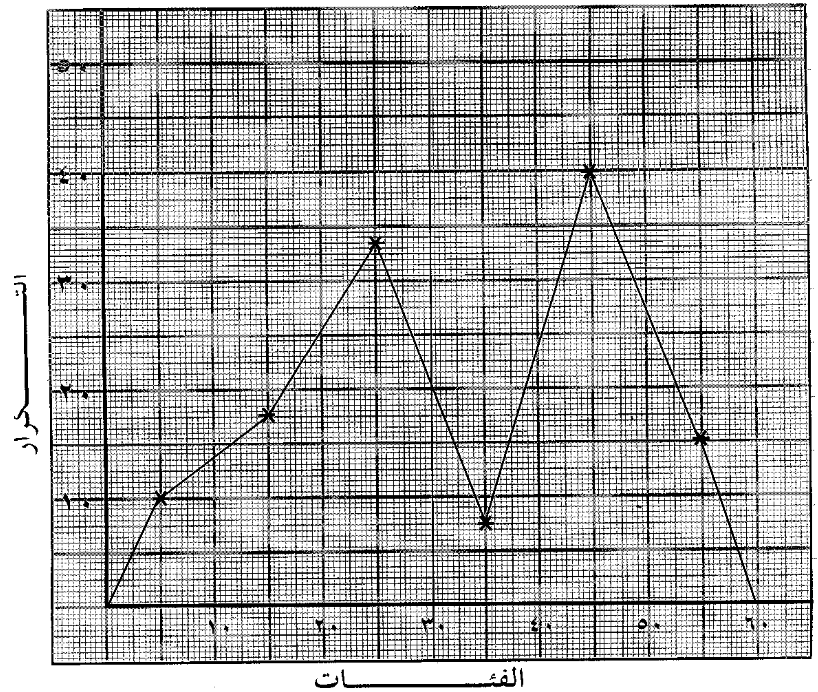
٢- عناصر العلاقة في (ب) هي :

(٥ ، ١٠) ، (١٥ ، ١٨) ، (٢٥ ، ٣٤) ، (٣٥ ، ٨) ، (٤٥ ، ٤٠) ، (٥٥ ، ١٥) .

٣- مثل الفئات على المحور الأفقي (السيني) والتكرارات على المحور الرأسي (الصادي) .

٤- حدد النقاط : (مركز الفئة ، التكرار)

٥- صل بين النقط المذكورة على التوالي مستخدماً حافة المسطرة ثم صل نقطتي الطرفين بالمحور الأفقي كما فعلنا سابقاً لتحصل على ما يسمى بالمضلع التكراري كما هو في الشكل (١٠-٦)



الشكل (١٠-٦)

تمرين (١٠-٤)

(١) أرسم مضلعاً تكرارياً للجدولين التكراريين الآتيين :

(أ)

الفئات	التكرارات
٠ ---- ١٠	٦
١٠ ---- ٢٠	٤
٢٠ ---- ٣٠	١١
٣٠ ---- ٤٠	١٤
٤٠ ---- ٥٠	١

(ب)

الفئات	التكرارات
٣٠ ----	١٥
٣٨ ----	١٣
٤٦ ----	١٢
٥٤ ----	٢٠
٦٢ ----	٧
٧٠ ----	٠
٧٨ ----	٣

(٢) من البيانات الآتية :

١٧	١٩	٣٧	٤٧	٥٥	٦١	٧٠	٧٢	٧٨	٥٤
٣٥	٢٣	٤١	٨٢	٩٠	٠٢	٠٤	٩٩	٣٤	٣٥
٤٢	١٧	٢٠	٢٨	٣١	٣٥	٤٢	٧٣	٦٢	٣٢
٢٢	٦٢	٦٩	٨٩	٨٧	٧٧	٦٧	٥٦	٩١	٩٢
٩٧	٨٩	٨١	٦٧	٢٧	٢١	١٣	١٩	٥٥	٥١
٧١	٧٣	٥٤	٧١	٦٩	٦١	٥٤	٥٦	٦٧	٥١

(أ) أنشئ جدولاً تكرارياً لهذه البيانات .

(ب) أرسم مدرجاً تكرارياً للجدول الذي أنشأته .

(جـ) على نفس المستوي الذي رسمت فيه المدرج التكراري وبنفس الجدول أرسم مضلعاً تكرارياً .

الدرس الخامس : الوسط الحسابي :

أعطي والد مبلغ ١٠٠ دينار لبنته وولده فأعطى الولد ٤٠ ديناراً ، وأعطى البنت ٦٠ ديناراً ، فإذا رغب الأخوان أن يوزعا المبلغ بينهما بالتساوي ، فما المبلغ الذي يحصل عليه كل منها ؟

المبلغ الذي حصلت عليه البنت يزيد بعشرين ديناراً عن المبلغ الذي حصل عليه الولد ، فإذا أعطت البنت الولد عشرة دينارات لحصل كل منهما على ٥٠ ديناراً .

نسمي العدد ٥٠ **الوسط الحسابي** أو المتوسط للعددين ٤٠ ، ٦٠ ويمكن الحصول عليه بالطريقة الحسابية الآتية :

مجموع ما حصل عليه الاثنان = ٤٠ + ٦٠ = ١٠٠ دينار .

الوسط الحسابي = ١٠٠ ÷ ٢ = ٥٠ ديناراً .

مثال (١) :

إذا كانت درجات تلميذ في امتحانين لمادة الرياضيات هما ٧٠ ، ٦٠ فما متوسط درجتيه في الامتحان ؟

الحل :

$$\text{متوسط درجتيه} = \frac{\text{مجموع الدرجتين}}{٢}$$

$$= \frac{٧٠ + ٦٠}{٢} = \frac{١٣٠}{٢} = ٦٥ \text{ درجة}$$

مثال (٢) :

صرفت فاطمة في ٤ أيام متتالية ٢٠ ، ١٠ ، ١٥ ، ١٥ ديناراً . ما متوسط مصروف فاطمة في الأيام الأربعة ؟

الحل :

مجموع ما صرفته فاطمة في الأيام الأربعة =

٢٠ + ١٠ + ١٥ + ١٥ = ٦٠

عدد الأيام = ٤ أيام

متوسط الصرف (الوسط الحسابي) = ٦٠ ÷ ٤ = ١٥ ديناراً يومياً

وهذا يعني أنه لو صرفت فاطمة ١٥ ديناراً في كل يوم لكان مجموع ما صرفته في الأيام الأربعة ٦٠ ديناراً .

فبشكل عام

$$\textbf{الوسط الحسابي لعدد من القيم} = \frac{\textbf{مجموع القيم}}{\textbf{عدد القيم}}$$

مثال (٣) :

إذا كان لدينا درجات ١٠ تلاميذ في أحد الصفوف في مادة ما كالآتي :

١٠ ، ١٧ ، ٣٣ ، ١٣ ، ٢١ ، ١٤ ، ١١ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٥ أوجد الوسط الحسابي لدرجات هؤلاء التلاميذ في هذه المادة .

الحل :

مجموع البيانات (الدرجات) =

١٠ + ١٧ + ٣٣ + ١٣ + ٢١ + ١٤ + ١١ + ١٥ + ٢١ + ٢٥ = ١٨٠

عدد البيانات (التلاميذ) = ١٠

$$\therefore \text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع البيانات (الدرجات)}}{\text{عدد البيانات (التلاميذ)}}$$

$$= \frac{١٨٠}{١٠} = ١٨$$

ويمكن اعتبار أن كلا من التلاميذ العشرة أحرز ١٨ درجة ، لاحظ أن :

عدد التلاميذ × الوسط الحسابي = ١٨٠ (مجموع البيانات) أي أن :

$$\boxed{\textbf{مجموع البيانات = الوسط الحسابي × عدد البيانات}}$$

مثال (٤) :

إذا كان مجموع ما عند عدد من التلاميذ من نقود يساوي ٥٤٠ ديناراً . قسم هذا المبلغ بينهم بالتساوي ، فكان نصيب كل منهم ٩٠ ديناراً . كم عدد هؤلاء التلاميذ ؟

الحل :

مجموع البيانات = الوسط الحسابي × عدد البيانات

٥٤٠ = ٩٠ × عدد البيانات

∴ عدد البيانات = $\frac{٥٤٠}{٩٠}$ = ٦

∴ عدد التلاميذ = ٦ تلاميذ

تمرين (١٠–٥)

(١) جد الوسط الحسابي لكل من البيانات الآتية :

(أ) ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٥ ، ٤ ، ٩

(ب) ١١ ، ٢٠ ، ٣٧ ، ٤٦ ، ٥٠ ، ١٢ ، ٦

(٢) إذا كانت درجة الحرارة المئوية الصغرى في خمسة أيام متتالية في منطقة ما هي : ٢٤ ، ١٨ ، ٢٥ ، ١٩ ، ٢٠ ما الوسط الحسابي لدرجات الحرارة في الأيام الخمسة ؟

(٣) البيانات الآتية توضح الإنتاج اليومي للبيض في مزرعة للدواجن خلال ٣ أسابيع :

٦٧	٣٧	٥٧	٩٤	٤٥	٩١	٥١	٤٢	٤٠
٣٠	٢٢	١٧	٢١	٥٩	٦٤	٧١	٨٠	٢٤
٣٧	٥٩	٣٢						

جد الوسط الحسابي للإنتاج اليومي .

(٤) اقتسم عدد من التلاميذ مبلغ ٦١٢٥ دينار فكان نصيب الواحد منهم ١٢٢٥ ديناراً . كم كان عدد التلاميذ ؟

(٥) الوسط الحسابي لخمسة أعداد ١٢ والوسط الحسابي لأربعة أعداد منها ١٣ جد العدد الخامس .

(٦) تابع عبد الغني أسعار اللحوم والخضروات والفواكه خلال خمسة أيام متتالية ، وسجل سعر الكيلوجرام الواحد من اللحوم البقرية بالدينار خلال هذه الأيام ، ووضع ما حصل عليه في الجدول الآتي :

اليوم	**الأول**	**الثاني**	**الثالث**	**الرابع**	**الخامس**
سعر الكيلو	٣٠٠	٣٠٠	٢٥٠	٢٥٠	٢٥٠

جد الوسط الحسابي لسعر الكيلوجرام من اللحم خلال هذه الفترة .

(٧) قطعت سيارة المسافات : ٦٠كم ، ٨٠كم ، ٧٣كم في ثلاث ساعات متتالية ، جد متوسط سرعة السيارة خلال الساعات الثلاثة .

الدرس السادس : المنوال :

البيانات التالية عبارة عن إنتاجية أبقار بخت الرضا من الألبان بالأرطال خلال أسبوع : ١٠٤ ، ١٠٠ ، ٩٩ ، ١٠٠ ، ١٠١ ، ١٠٠ ، ١٠٢

ما هي المفردة الأكثر شيوعاً بين الإنتاج الأسبوعي للألبان ؟

المفردة الأكثر شيوعاً هي ١٠٠ فقد تكررت ثلاث مرات هذه القيمة الأكثر شيوعاً أو الأكثر تكراراً من غيرها تسمى **المنوال** ،

وبصفتها أكثر شيوعاً من غيرها بين قيم المجموعة ، يمكن اعتبارها ممثلاً جيداً لهذه المجموعة ، فإذا سئلنا عن الإنتاج اليومي لمزرعة بخت الرضا يمكن أن نقول أن إنتاجها اليومي يساوي ١٠٠ رطل تقريباً .

أما في حالة الجدول التكراري ذي الفئات فنعتبر أن **الفئة المنوالية** هي الفئة التي تشتمل على أكبر عدد من التكرارات ويمثل المنوال في هذه الحالة مركز هذه الفئة بصورة تقريبية .

مثال : جد منوال الأعداد الآتية :

٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٥ ، ٦ ، ٥ ، ٧ ، ٥

الحل :

المنوال = ٥

مثال : الجدول الآتي يبين توزيع درجات تلاميذ في مادة الرياضيات . جد المنوال ؟

الدرجة	التكرار
١٠	٢
٢٠	٤
٣٠	٨
٤٠	١٢
٥٠	٦

الحل :

المنوال = ٤٠ درجة .

تمرين (١٠-٦)

١- جد منوال البيانات الآتية :

٧ و ١٢ ، ٥ ، ٢ ، ١٢ ، ٧ ، ٥ ، ٧

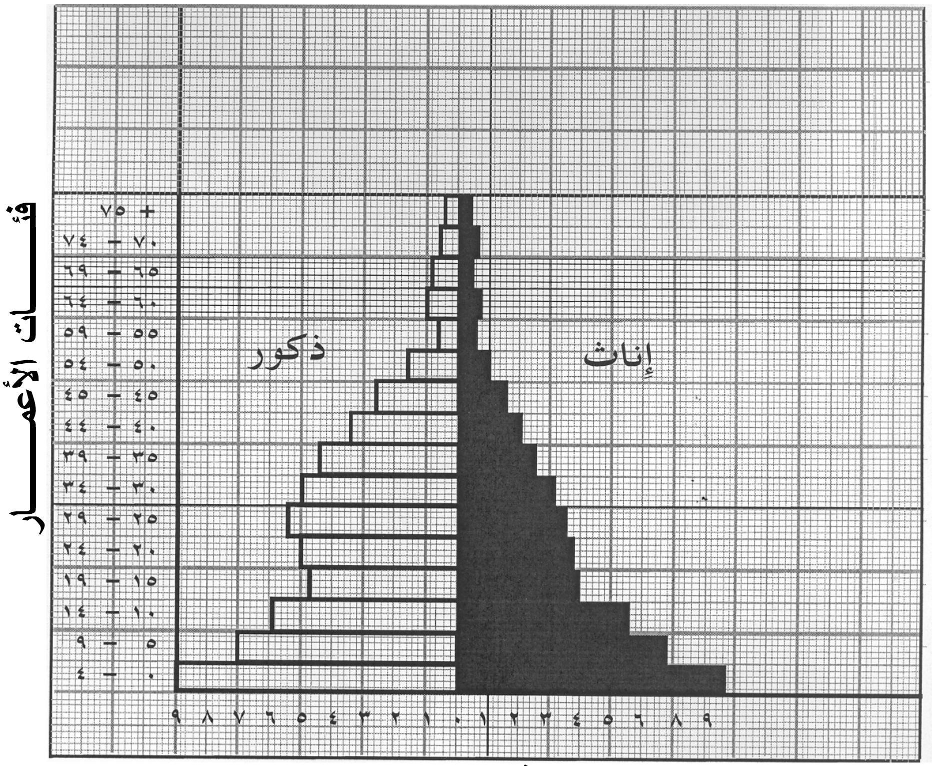
٢- سجلت درجات الحرارة الآتية في فصل الشتاء في الأسبوع الأول من شهر فبراير ٢١ ، ١٩ ، ٢٤ ، ٢١ ، ١٥ ، ١٤ ، ٢١ جـد المنوال لهذه البيانات .

٣- الجدول الآتية يمثل توزيع ١٥٠ معلماً للرياضيات بمرحلة التعليم الأساسي حسب فئات أعمارهم في محافظة من المحافظات . جد المنوال لهذا التوزيع .

الفئات العمرية	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-
التكرار	١٤	٢٠	٤٥	٥١	٢٠

الدرس السابع : الهرم السكاني :

يبين الهرم السكاني بالرسم البياني تكوين السكان من حيث العمر والنوع (ذكر وأنثى) . وإبراز عدد أو نسبة الذكور والإناث في كل فئة من فئات العمر ، يقدم الهرم السكاني صورة حية لخصائص السكان ويصور الهرم السكاني الآتي التركيب العمري والنوعي لسكان دولة ما .



الشكل (١٠–٧) الهرم السكاني

كل عمود أفقي يبين حجم فئة العمر والنوع ، ويبين العمود الأفقي في قاعدة الهرم نسبة الذكور والإناث الذين تقل أعمارهم عن ٥ سنوات .

ويمثل العمود عن فئة العمر (٣٠ – ٣٤) من الهرم جميع الأحياء الـــذين كانوا يعيشون في تلك الدولة في عام محدد . وهكذا صعوداً إلـــى قمـــة الهرم حيث تبين الأعمدة الصغيرة جداً ما تبقى على قيد الحياة في الفئـــة العمرية المحددة .

إن مثل هذا الهرم يدل على الكثير بالنسبة للسكان بمجـــرد إلقـــاء نظرة عليه وفيما تعلق بالهرم السابق نلاحظ أن للهرم قاعـــدة عريـــضة تشير إلى ارتفاع معدل الخصوبة . نلاحظ أن هنالك عدداً مـــن الـــذكور أكبر قليلاً من الإناث في فئة العمر صفر – ٤ ، مما يعكس الحقيقة التي معناها أن المواليد من الذكور يتفوقون عددا على المواليد من الإنـــاث . وإذا ما صعدنا في اتجاه قمة الهرم ، نجد الأشرطة بصفة عامة تـــنقص في طولها ، حيث تقتطع الوفاة نسبة من كل فئة عمرية . وفي هذا الهرم نلاحظ أن الذكور يتفوقون من حيث العدد بدرجة كبيرة على الإناث فـــي سن العمل الرئيسة من سن ٢٠ إلى منتصف ٥٠ عاماً .

رسم الهرم السكاني

من الجدول أدناه :

فئات السن	ذكـــــور	إنـــــاث
٠ ـــــــ ٤	١٧٢٨	١٦٥٢
٥ ـــــــ ٩	١٩٢٧	١٨٧٢
١٠ ـــــــ ١٤	١٦٥١	١٥٢٧
١٥ ـــــــ ١٩	١١١٤	١٠٤٠
٢٠ ـــــــ ٢٤	٩٢١	٨٧٤
٢٥ ـــــــ ٢٩	٨٦٠	١٠٥٤
٣٠ ـــــــ ٣٤	٨٠٧	٨٤٤
٣٥ ـــــــ ٣٩	٨٤٧	٨٧٩
٤٠ ـــــــ ٤٤	٦٦١	٦١٤
٤٥ ـــــــ ٤٩	٥٦٧	٥٧٧
٥٠ ـــــــ ٥٤	٤٩٤	٥٠٤
٥٥ ـــــــ ٥٩	٣٢٣	٣١٥
٦٠ ـــــــ ٦٤	٣٢١	٣٥٤
٦٥ ـــــــ ٦٩	١٦٤	١٦٩
٧٠ ـــــــ ٧٤	١٣٤	١٦٨
٧٥ فأكثر	١٢١	١٤٧

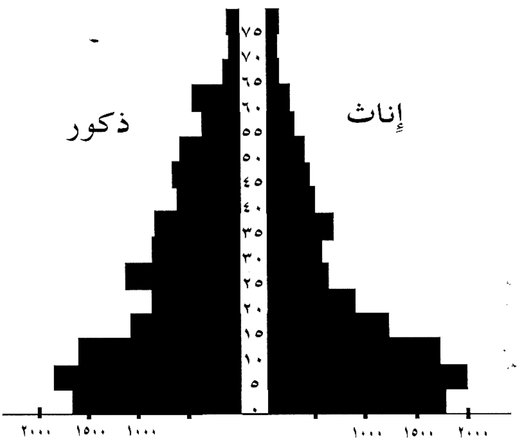
يمكننا تمثيل التركيب النوعي والعمري للسكان في هـرم سـكاني باتباع الخطوات التالية :

١- نأخذ محورين متعامدين أحدهما رأسي نبين عليه الأعمار والآخـر أفقي نبين عليه أعداد الذكور على يمين المحور الرأسي والإنـاث على يساره .

٢- ثم نقسم المحور إلى مسافات متساوية حدودها النقط ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ... ، ٨٠ وهي الحدود العليا لفئات العمر المذكورة في الجدول .

٣- بجانب الفئة (٠ – ٤) نرسم شريطاً أفقياً علـى يمـين المحـور الرأسي طوله يمثل عدد الذكور الذين تقع أعمارهم بـين صـفر وخمس سنوات ونرسم شريطاً أفقياً آخر علـى يـسار المحـور الرأسي طوله يمثل عدد الإناث في نفس الفئة ٠ ــــــ ٤ .

٤- ثم نرسم فوق هذين الشريطين شريطين آخرين على يمين المحور الرأسي ويساره يمثلان الذكور والإناث في الفئـة (٥ ــــــ ٩) وهكذا إلى آخر الجدول . فنحصل من هذه الأزواج على أشـرطة متتالية ومتناقصة في الطول على شكل يشبه الهرم كما هـو فـي الشكل الآتي ويسمى الهرم السكاني .



رقم الإيداع: ٢٠٠٨/٦٨٦