بسم الله الرحمن الرحيم

جمهورية السودان

وزارة التربية والتعليم

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

بخت الرضا

المرحـــــلة المتوسطة

الريـاضيات

الصف الثالث

أعدته بتكليف من المركز القومي للمناهج والبحث التربوي لجنة من الأساتذة:

د . الخطيب الطيب سيد أحمد حمد توده - المنـــــاهج بخت الرضا

د . محمد حمد النيل محمد جبريل - خبير تربـــــوي

د . عادل أحمد حسن كبة - جـــــامعة وادي النيل

د . طارق أحمد الحسن الحويج - معلم ولاية الخـــــرطوم

الإشراف العـــــام :

د . معاوية السر قشي – المدير العام

أ . حبيب آدم حبيب أحمدية –نائب المدير العام

أ . الباقر رحمة البشير – الأمين العام للمركز

أ . أحمد حمدالنيل حسب الله – مدير إدارة المناهج

التصميم والإخراج الفني :

د . الرفاعي عبدالله عبدالمهيل مرحوم – المناهج بخت الرضا

الجمع بالحاسوب:

حافظ محمد إبراهيم

إيمان مهدي نورين

الطبعة الأولى : ٢٠٢٤ م

الفهرس

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة :

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين سيدنا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين .

وبعد :

نقدم لكم أعزاءنا المعلمين والمعلمات وأولياء الأمور وتلاميذنا وتلميذاتنا النجباء كتاب الرياضيات للصف الثالث من مرحلة التعليم المتوسط وفقاً لرؤية المؤتمر القومي للتعليم ٢٠٢٠م لتطوير مناهج التعليم وفق مدخل المعايير للمواد المنفصلة ، آخذين في الاعتبار توجهات التطورات المعرفية والتكنولوجية المتسارعة في جميع مجالات الحياة . وقد جاء المقرر إمتداداً لمقرري الصف الأول والثاني متوسط وذلك وفقاً لما ورد في وثيقة المناهج ومصفوفة المدى والتتابع للمناهج الجديدة .

ونرجو من تلاميذنا وتلميذاتنا أن يحافظوا على هذا الكتاب ليستفيد منه من يجيء بعدهم . وأخيراً نسأل الله لكم التوفيق وأن يعينكم على تقديمه بالصورة التي تفيد التلميذ . ونحن في انتظار نقدكم البنّاء لمحتواه مشاركة منكم في تطويره وتجويده .

والله الموفق

المؤلفون

الوحدة الأولى

الدالة (التطبيق)

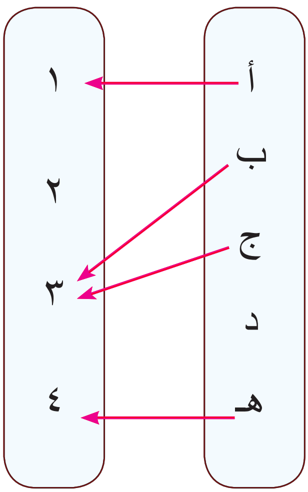
درس مراجعة

العلاقـــــات

درست في الصف الأول المتوسط مفهوم العلاقة بين مجموعتين وتعرفت أن العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعتين تسمى المجموعة الأولى المجال وتسمى المجموعة الثانية المجال المقابل وتعرفت أنه يمكن كتابة العلاقة في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة كما يمكن تمثيل العلاقة بمخطط سهمي، مثلاً نقول ع : س ⟵ ص وتقرأ

ع علاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص

مثـــــال:



س ص

المجال المجال المقابل

إذا كانت س = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ }

ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص معرفة بالمخطط السهمي في الشكل المقابل فإن:

مجال العلاقة ع = {أ ، ب ، جـ ، د ، هـ }

المجال المقابل للعلاقة ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

مدى العلاقة ع = { ١ ، ٣ ، ٤ } لماذا لم يكتب العنصر ٢ ؟

تذكر أن مدى العلاقة هو مجموعة صور عناصر المجال في المجال المقابل.

- نلاحظ في العلاقة ع أن صورة العنصر أ هي ١ ما صورة العنصر هـ ؟

نلاحظ العنصر ٣ في ص يمثل صورة مشتركة لعنصرين في س ، ما هما ؟

هل يوجد عنصر في ص لم يقترن به أيّ عنصر في س ؟ ما هو ؟

يمكن كتابة العلاقة ع المعرّفة بالمخطط السهمي في الشكل السابق في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة كالآتي:

ع : س ⟵ ص حيث ع = { (أ ، ١) ، (ب ، ٣) ، (جـ ، ٣) ، (هـ ، ٤) }

نلاحظ أن كل زوج مرتب يتكون من عنصرين بينهما فاصلة (،) يسمى العنصر الأول بالمكون (المسقط) الأول ويسمى العنصر الثاني بالمكون (المسقط) الثاني، مثلاً في الزوج المرتب:

(أ ، ١) : أ مكون أول ، ١ مكون ثاني.

(ب ، ٣) : ب مكون أول، ٣ مكون ثاني وهكذا في بقية الأزواج المرتبة.

يلاحظ في كل زوج مرتب : يقترن العنصر مع صورته وتظهر الصورة كمكون ثانٍ.

تدريب:

إذا كان س = { أ ، ب ، جـ ، د }

ص = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

وكانت ع علاقة من س ⟵ ص حيث ع = {(أ ، ٣) ، (ب ، ١) ، (جـ ، ٩) ، (د ، ٧)}

جد ما يلي:

١. مجال العلاقة ع .

٢. المجال المقابل للعلاقة ع .

٣. مدى العلاقة ع .

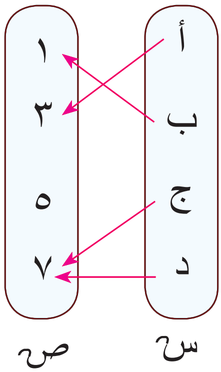
٤. صورة العنصر جـ ، وصورة العنصر د .

٥. هل يوجد عنصر في ص لا يمثل صورة لأي عنصر في س ؟ ما هو ؟

(١- ١) تعريف الدالة (التطبيق)

نشاط :

المخطط السهمي في الشكل أدناه يمثل علاقة ع معرفة من المجموعة س إلى المجموعة ص .



١) جد ما يلي:

أ/ المجال والمجال المقابل للعلاقة ع .

ب/ مدى العلاقة ع

٢) هل كل عنصر في المجال س ارتبط بعنصر واحد فقط في المجال المقابل ص ؟

بمعنى هل كل عنصر في س خرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص ؟

نلاحظ أن هذه العلاقة ع تتميز بخاصية أن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص لذلك نقول إن مثل هذه العلاقة تمثل تطبيقاً من س إلى ص . وهذا يقودنا إلى التعريف الآتي للتطبيق (الدالة)

مفهوم أساسي

يقال عن العلاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص أنها تطبيق إذا كان كل عنصر من عناصر س يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص .

- يسمى س المجال، ويسمى ص المجال المقابل للتطبيق.

حيث س ، ص مجموعتان غير خاليتين

ملحوظة:

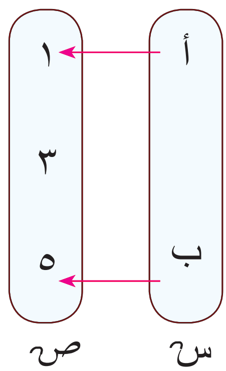
نلاحظ في العلاقة ع في الشكل السابق أن العنصر ٥ في ص لم يصله أي سهم من س، كما نلاحظ أن العنصر ٧ في ص وصله سهمان من س ، ومع ذلك نقول أن مثل هذه العلاقة تمثل تطبيقاً لأنها حققت الشرط الآتي: كل عنصر في س ارتبط بعنصر واحد فقط في ص .

تحقق من فهمك:

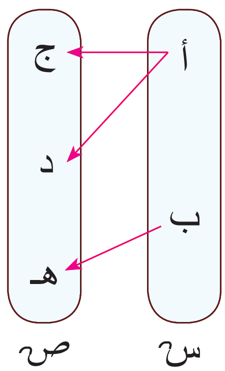
- ما الذي يحدد ما إذا كانت العلاقة تمثل تطبيقاً أم لا ؟ هل عناصر المجال أم عناصر المجال المقابل ؟

مثال (١):

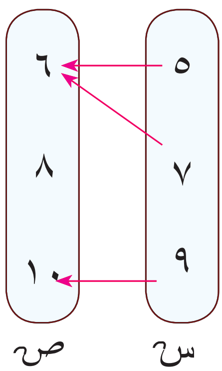
أيّ العلاقات الآتية تُمثِّل تطبيقاً وأي منها لا تُمثِّل تطبيقاً ؟ مع ذكر السبب.



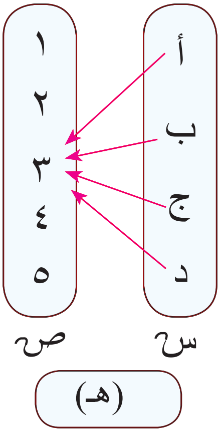
(أ)

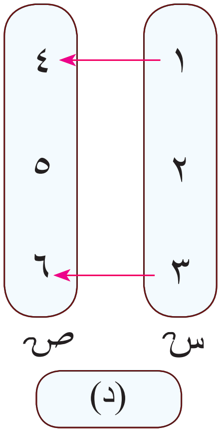


(ب)



(جـ)





الحل:

- العلاقة (أ) تمثل تطبيقاً من س إلى ص لأن كل عنصر في س ارتبط بعنصر واحد فقط في ص.
- العلاقة (ب) لا تمثل تطبيقاً لأن العنصر أ في س ارتبط بعنصرين في ص هما جـ ، د
- العلاقة (جـ) تمثل تطبيقاً لأن كل عنصر في س ارتبط بعنصر واحد فقط في ص
- العلاقة (د) لا تمثل تطبيقاً لأن العنصر ٢ في س لم يرتبط بأي عنصر في ص .
- العلاقة (هـ) تمثل تطبيقاً لأن كل عنصر في س ارتبط بعنصر واحد فقط في ص

مثال (٢):

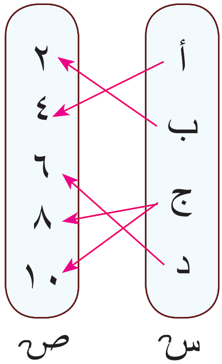
إذا كان س = { أ ، ب ، جـ ، د }

ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠} وكانت ع علاقة من س ⟵ ص حيث:

ع = { (أ ، ٤) ، (ب ، ٢) ، (جـ ، ٨) ، (جـ ، ١٠) ، (د ، ٦) }

مثّل العلاقة ع بمخطط سهمي، هل هذه العلاقة تمثّل تطبيقاً أم لا ؟ اذكر السبب.

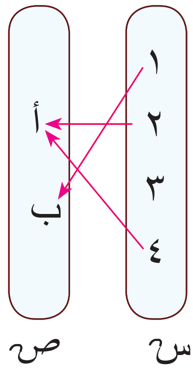
الحل:



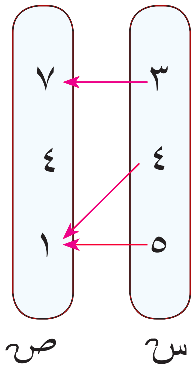
العلاقة ع لا تمثّل تطبيقاً لأن العنصر جـ في س ارتبط مع عنصرين في ص هما ٨ ، ١٠

تمرين (١)

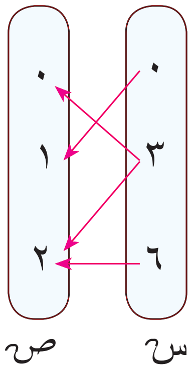
١) أيّ الأشكال التالية تمثّل تطبيقاً ؟ ولماذا ؟



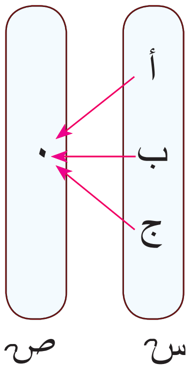
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

٢) افترض أن:

أ = { س ، ص ، ط } .

ب = { ٠ ، ٢ ، ٤ }

أيّ العلاقات التالية تمثّل تطبيقاً من أ إلى ب ؟ ولماذا ؟

$ع_١$ = { (س ، ٠) ، (ص ، ٢) ، (ط ، ٠)}

$ع_٢$ = { (س ، ٠) ، (ص ، ٤) ، (ص ، ٢) }

$ع_٣$ = { (ص ، ٠) ، (س ، ٠) ، (ط ، ٠)}

$ع_٤$ = { (س ، ٠) ، (ط ، ٢) }

٣) باعتبار أن س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

ص = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

ارسم مخططاً سهمياً لكل من العلاقات الآتية والمعرّفة من س إلى ص ثم بيّن أيّ منها يمثّل تطبيقاً:

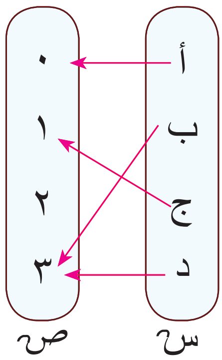
$ع_١$ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٥ ، ٥) }

$ع_٢$ = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٧) ، (٥ ، ٩) }

$ع_٣$ = { (٥ ، ٥) ، (٤ ، ١) ، (٣ ، ٧) ، (٣ ، ٩) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٣) }

$ع_٤$ = { (١ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ، (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٣) ، (٣ ، ٣)}

٤) إذا كان التطبيق ت : س ⟵ ص ممثلاً بالمخطط السهمي في الشكل أدناه اكتب ت في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة.



(١ - ٢) صورة العنصر

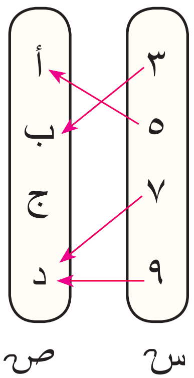
إذا كانت س = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

ص = { أ ، ب ، جـ ، د}

وكانت ت تطبيقاً من س إلى ص فإنها تكتب في الصورة ت : س ⟵ ص

وتقرأ ت تطبيق من س إلى ص .

فإذا كانت ت : س ⟵ ص معرفة بالمخطط السهمي الآتي :



نلاحظ في الشكل أن:

ت = { (٣ ، ب) ، (٥ ، أ) ، (٧ ، د) ، (٩ ، د)}

ونلاحظ أنّ :

العنصر ٣ في المجال س اقترن بالعنصر ب في المجال المقابل ص لذلك تسمى ب صورة العنصر ٣ ويرمز لصورة العنصر ٣ بالرمز ت (٣) أي ت (٣) هي ب وتقرأ صورة العنصر ٣ هي ب

اذكر ت (٥) ، ت (٧) ، ت (٩)

- هل يوجد في المجال المقابل ص عنصر يمثّل صـــــــــــورة لعنصرين في المجـــال س ؟

العنصر .... في ص يمثل صورة مشتركة لعنصرين من س هما .... و........

- هل يوجد عنصر في ص لا يمثل صورة لأي عنصر من س ؟ ما هو ؟

العنصر .... في ص ليس صورة لأي عنصر من س

مثال (١):

إذا كان د : ط ← ط معرّف بالقانون كل عنصر في ط يقترن بمربعه ، جد: د (١) ، د (٣)، د (٤) ، د (٥) ، د (س)

الحل:

∵ قاعدة اقتران العنصر هي: يقترن كل عنصر بمربعه

∴ د (١) = ١ ^{٢} = ١ × ١ = ١

د (٢) = ٢ ^{٢} = ٢ × ٢ = ٤

د (٣) = ٣ ^{٢} = ٣ × ٣ = ٩

د (٤) = ٤ ^{٢} = ٤ × ٤ = ١٦

د (٥) = ٥ ^{٢} = ٥ × ٥ = ٢٥

د (س) = س^{٢}

الصورة د (س) = س^{٢} تمثل صورة مختصرة بالرموز لقاعدة اقتران هذا التطبيق ويمكن أن يرمز لصورة س بالرمز ص فتكتب ص = د (س) أو ص = س^{٢} كما أنها تكتب أحياناً على الصورة س ⟵ س^{٢}

مما سبق نلاحظ أنه يمكن كتابة قاعدة اقتران هذا التطبيق (كل عنصر يقترن بمربعه) بثلاث طرق:

د (س) = س^{٢}

ص = س^{٢}

س ⟵ س^{٢}

مثال (٢):

إذا كان التطبيق ق : ص ⟵ ص معرّفاً بالقانون ق (س) = س − ١

جد: ق (٣) ، ق (١) ، ق (٠) ، ق (-١) ، ق (-٤)

الحل:

ق (س) = س – ١

ق (٣) = ٣ – ١ = ٢

ق (١) = ١ – ١ = ٠

ق (٠) = ٠ – ١ = –١

ق (–١) = –١ – ١ = –٢

ق (–٤) = –٤ – ١ = –٥

مثال (٣):

إذا كان د : ن ⟵ ن معرّفاً بالقانون ص = د (س) = ٢س – ١ ، جد:

أ/ د (٥) ، د (٠) ، د ($\frac{-١}{٢}$)

ب/ { س : د (س) = ٧}

جـ/ { ص : ص = د (٦)}

الحل:

أ/ ∵ د (س) = ٢س – ١

∴ د (٥) = (٢ × ٥) – ١ = ١٠ – ١ = ٩

د (٠) = (٢ × ٠) – ١ = ٠ – ١ = –١

د ($\frac{-١}{٢}$) = ٢ × $\frac{-١}{٢}$ – ١ = –١ – ١ = –٢

ب/ { س : د (س) = ٧ } تعني مجموعة قيم س (عناصر في المجال) التي صورتها ٧

∵ د (س) = ٢س – ١

∵ د (س) = ٧

∴ ٢س – ١ = ٧

٢س = ٨ ، ∴ س = ٤

∴ { س : د (س) = ٧ } = { ٤ }

هذا يعني أن العنصر الذي صورته ٧ هو العنصر ٤ ، أي د (٤) = ٧

جـ / { ص : ص = د (٦) } تعني مجموعة الصور للعنصر ٦

∵ د (س) = ص = ٢س – ١

∴ ص = (٢ × ٦) – ١ = ١٢ – ١ = ١١

∴ { ص : ص = د (٦)} = { ١١ }

وهذا يعني أن صورة العنصر ٦ هي ١١ أي أنّ د (٦) = ١١

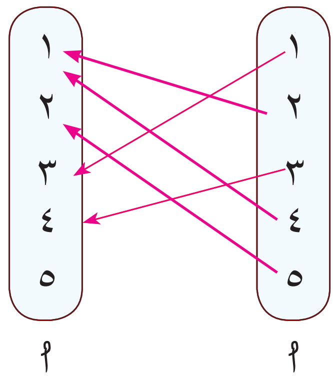
تحقق من فهمك :

من المثال (٣) باستخدام قاعدة الاقتران د (س) = ٢س – ١ جد:

د (٤) ، د (٦) .

تمرين (٢)

١) افترض أن ت : أ ← أ معرّف بالمخطط السهمي الآتي:



- جد: ت (١) ، ت (٣) ، ت (٤)

- عبّر عن ت في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة.

٢) اكتب القانون أو قاعدة الاقتران لكل مما يأتي مستخدماً الرمز س :

أ/ د : ط ← ط يقترن كل عنصر مع ثلاثة أمثاله.

ب/ د : ص ← ص يقترن كل عنصر مع مربعه زائداً ٣ .

جـ/ د : ن ← ن يقترن العنصر مع نفسه .

٣) إذا كان د : ص ← ص معرّفاً بالقانون ص = س^{٢} + ١ . جد:

أ/ د (-١) ، د (٠) ، د (٢) .

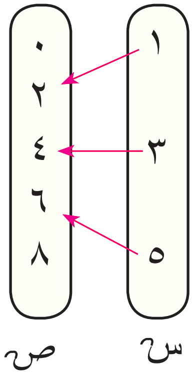
ب/ { س : د (س) = ٢ } .

جـ/ { ص : ص = د (-٣) } .

(١- ٣) مدى التطبيق

إذا كان س = { ١ ، ٣ ، ٥}

ص = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}



د : س ⟵ ص معرف بالمخطط السهمي في الشكل المقابل.

س هي مجال التطبيق، ص هي المجال المقابل له

العناصر ٢ ، ٤ ، ٦ هي صور العناصر ١ ، ٣ ، ٥ على الترتيب،

تسمى المجموعة { ٢ ، ٦ ، ٤} مدى التطبيق

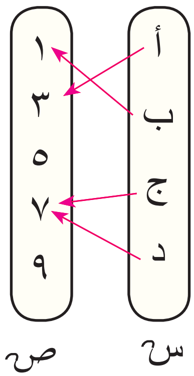
مفهوم أساسي

مدى التطبيق هو مجموعة جميع صور عناصر المجال وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل.

مثال (١):

إذا كان س = { أ ، ب ، جـ ، د}

ص = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}



ت : س ⟵ ص معرّف بالمخطط السهمي بالشكل المجاور **جد:**

١) ت (أ) ، ت (ب) ، ت (جـ) ، ت (د)

٢) مدى التطبيق ت

الحل:

١) ت (أ) = ٣

ت (ب) = ١

ت (جـ) = ٧

ت (د) = ٧

٢) مدى التطبيق ت = { ١ ، ٣ ، ٧}

مثال (٢)

إذا كان ق : سَ ⟵ طُ

حيث سَ = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

وقاعدة الاقتران هي س ⟵ س + ٤

ما مدى التطبيق ق ؟

الحل:

∵ قاعدة اقتران التطبيق ق هي :

س ⟵ س + ٤

∴ ٣ ⟵ ٣ + ٤ = ٧

٤ ⟵ ٤ + ٤ = ٨

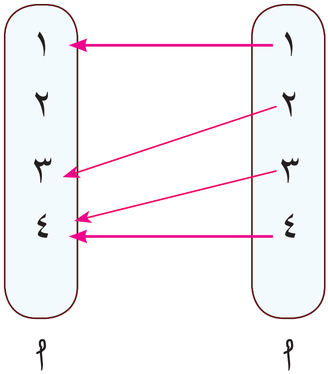
٥ ⟵ ٥ + ٤ = ٩

٦ ⟵ ٦ + ٤ = ١٠

ويكون مدى التطبيق ق = { ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}

تمرين (٣)

١) إذا كان أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} و عرِّف ق : أ ⟵ أ بالمخطط أدناه



جد مدى التطبيق ق

٢) إذا كان س = { – ٢ ، – ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }

و كان د تطبيقاً د: س ⟵ ط معرّفاً بالقانون د (س) = $س^{٢}$ + ١

ما مدى التطبيق د ؟

٣) إذا كان س = { – ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }

ص = { – ٣ ، – ١ ، ٠ ، ١ ، ٣ }

ت : س ⟵ ص

حيث س ⟵ ٢س – ١

أ/ ارسم مخططاً سهمياً لهذا التطبيق .

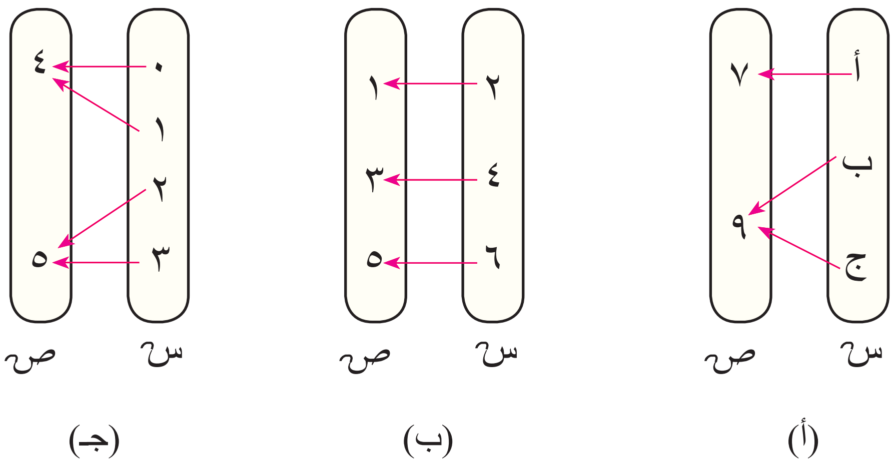
ب/ جد المدى لهذا التطبيق .

(١- ٤) أنواع من التطبيقات

التطبيق الشامل:

نشاط:

تأمل المخططات السهمية الثلاثة الآتية :



كل المخططات السهمية السابقة تمثّل تطبيق . لماذا ؟

من المخططات السهمية السابقة في كل حالة :

- جد مدى التطبيق .
- جد المجال المقابل للتطبيق .
- في كل تطبيق قارن بين مدى التطبيق ومجاله المقابل . ماذا تلاحظ ؟

هل مدى التطبيق = مجاله المقابل ؟

نسمي مثل هذا النوع من التطبيق بالتطبيق الشامل لأن التطبيق قد شمل كل عناصر المجال المقـــابل ص بمعنى أن مدى التطبيق مساوٍ لمجاله المقابل .

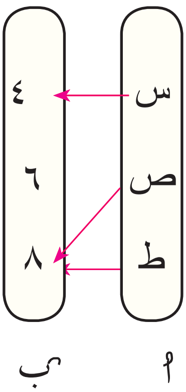
مفهوم أساسي

نقول عن التطبيق د إنه تطبيق شامل إذا كان مداه مساوياً لمجاله المقابل أي إذا كان كل عنصر في المجال المقابل صورة لعنصر واحد على الأقل في المجال.

- يكون التطبيق غير شامل إذا وجد في المجال المقابل عنصر واحد على الأقل لم يصله سهم (لم يقترن به أي عنصر من المجال).
- هل التطبيق الثاني في الشكل (ب) شامل ؟ ولماذا ؟
- هل التطبيق الثالث في الشكل (جـ) شامل ؟ ولماذا ؟

مثال (١):

ق : أ ⟵ ب معرفة بالمخطط السهمي التالي:



هل التطبيق شامل ؟

∵ مدى ق = { ٤ ، ٨} بينما مجاله المقابل { ٤ ، ٦ ، ٨}

∴ المدى ≠ المجال المقابل

∴ ق تطبيق غير شامل.

مثال (٢):

افرض أن ت : ط ⟵ ط معرف بالقانون د (س) = ٢ س ، هل التطبيق شامل ؟

الحل:

∵ قاعدة اقتران ت هي د (س) = ٢ س

∴ مدى هذا التطبيق هو الأعداد الزوجية فقط في ط (لأن حاصل ضرب أي عدد طبيعي × ٢ يكون الناتج عدداً زوجياً في ط) بينما المجال المقابل لهذا التطبيق هو جميع الأعداد الطبيعية الفردية والزوجية.

∴ المدى ≠ المجال المقابل

∴ التطبيق غير شامل.

تحقق من فهمك: في المثال (٢):

خذ العنصر ٣ ∈ ط في المجال المقابل هل هو صورة لعنصر في المجال؟ بمعنى هل يوجد عنصر س ∈ ط في المجال بحيث يكون د (س) = ٣ ، تذكر أن قاعدة الاقتران د (س) = ٢ س

مثال (٣):

د : ص ⟵ ص يقترن كل عنصر في المجال بالعنصر التالي له مباشرة، هل هذا التطبيق شامل ؟

الحل:

∵ كل عنصر في المجال المقابل هو عدد صحيح، وأي عدد صحيح يمثل صورة للعنصر السابق له مباشرة

∴ جميع عناصر المجال المقابل تمثل صوراً

∴ المدى = المجال المقابل

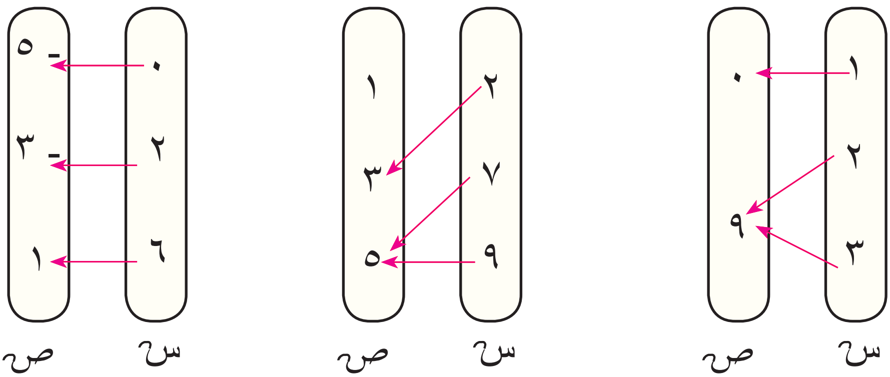
∴ التطبيق شامل.

تحقق من فهمك: من المثال (٣) جد: د (٣) ، د (٠) ، د (-٥)

تمرين (٤)

١) متى يكون التطبيق ت : س ← ص تطبيقاً شاملاً ؟ هات مثالاً لتطبيق شامل ممثلاً بمخطط سهمي.

٢) أي التطبيقات الآتية تطبيق شامل ولماذا ؟



(أ) (ب) (جـ)

(د) ت : ط ← ط معرّف بالقانون ت (س) = س + ١

٣) إذا كان د : ص ← ص تطبيقاً معرفاً بالقانون د (س) = س^{2} ، هل ت تطبيق شامل؟ ولماذا ؟

٤) افترض أن س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} وأن التطبيق د من س إلى س معرّف كما في الجدول:

س	١	٢	٣	٤	٥
د (س)	٣	١	٢	٥	٤

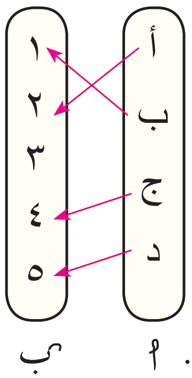
أ/ ارسم مخططاً سهمياً لهذا التطبيق.

ب/ عيّن مدى التطبيق. جـ / هل التطبيق شامل؟

(١ - ٥) التطبيق المتباين (واحد لواحد (١ – ١))

نشاط:

إذا كان د : أ ⟵ ب معرفاً بالمخطط السهمي الآتي:



من المخطط السهمي المجاور:

- جد مدى التطبيق د
- هل يوجد في مدى د عنصر وصله أكثر من سهم واحد من المجال.

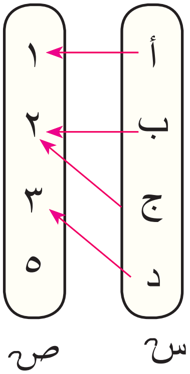
مما سبق نلاحظ أن كل عنصر في مدى د قد وصله سهم واحد فقط من أحد عناصر المجال أي أنّ كل عنصر في مدى د هو صورة لعنصر واحد فقط من عناصر المجال لذلك نقول أن التطبيق د متباين وهذا يقودنا إلى تعريف التطبيق المتباين.

مفهوم أساسي

نقول عن التطبيق د أنه متباين أو واحد لواحد (١ – ١) إذا كان كل عنصر في مدى التطبيق صورة لعنصر واحد فقط من مجاله.

وبتعبير آخر إذا لم يوجد عنصران مختلفان في المجال يقترنان بعنصر واحد في المجال المقابل.

مثال (١):



إذا كان ت : س ⟵ ص معرّفاً بالمخطط السهمي الآتي:

- هل ت تطبيق متباين ؟ ولماذا ؟

الحل :

ت تطبيق غير متباين لأن العنصر ٢ في ص

اقترن به عنصران مختلفان من س هما ب ، جـ

(أي أن العنصر ٢ في ص هو صورة لعنصرين من س هما ب ، جـ)

مثال (٢):

لنفترض أن د : ط ⟵ ط معرّف بالقانون د (س) = ٢ س

هل التطبيق د متباين ؟ ولماذا ؟

الحل :

د تطبيق متباين لأن صورة العدد الطبيعي هي ضعفه ولا يوجد عدد طبيعي يمثل الضعف لعددين طبيعيين مختلفين، أي لا يشترك عنصران من المجال في صورة واحدة.

مثال (٣):

لنفترض أن س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

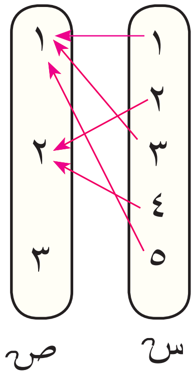
ص = { ١ ، ٢ ، ٣ }

وكان ق = س ← ص معرّفاً بالعبارة :

ق (س) = { ١ إذا كان س عدداً فردياً .
ق (س) = { ٢ إذا كان س عدداً زوجياً .

كل عنصر فردي في س يقترن بالعنصر ١ في ص ، كل عنصر زوجي في س يقترن بالعنصر ٢ في ص

ارسم المخطط السهمي له ثم وضّح أن ق تطبيق غير شامل وغير متباين



الحل:

التطبيق ق غير شامل لأن المدى ≠ المجال المقابل لأن

العنصر ٣ في ص ليس صورة لأي عنصر من س

التطبيق غير متباين لأن العنصر ٢ مثلاً في ص اقترن به عنصران من س

هما ٢ ، ٤ .

مما سبق: إذا كان في المجال المقابل عنصر واحد على الأقل يمثل صورة لأكثر من عنصر واحد من المجال فالتطبيق غير متباين.

- **تدرّب وتحقق من فهمك:**

إذا كان د : ص ← ص معرّفاً بالقانون د (س) = س^2

هل د متباين أم لا ؟ ولماذا ؟

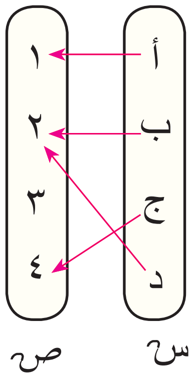
تمرين (٥)

١) متى يكون التطبيق متبايناً ؟

٢) هات مثالاً لتطبيق متباين .

٣) عرّف بمخطط سهمي ق : { ١ ، ٢ ، ٣ } ← {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} بحيث يكون ق تطبيقاً متبايناً.

٤) أي التطبيقات الآتية متباين ولماذا ؟ (أ)



(ب) ت : طُ ← طُ معرّف بالقانون ت (س) = $س^{٢}$ + ١

(جـ) ت : ص ← ص معرّف بالقانون ت (س) = س – ١

(د) ت : {١ ، ٢ ، ٣ } ← {٥ ، ٧ ، ٩}

وكان ت = { (١ ، ٥) ، (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٧)}

٥) مستخدماً المخططات السهمية اعط مثالاً لكل تطبيق من التطبيقات الآتية:

أ/ تطبيق شامل ومتباين.

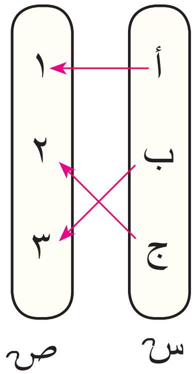
ب/ تطبيق شامل وغير متباين.

جـ/ تطبيق متباين وغير شامل.

د/ تطبيق غير شامل وغير متباين.

(١ - ٦) التقـــــابل

المخطط السهمي في الشكل أدناه يمثل تطبيقاً ، ت : س ⟵ ص



- هل التطبيق ت شامل ؟ ولماذا ؟
- هل التطبيق ت متباين ؟ ولماذا ؟

نلاحظ أن التطبيق ت شامل ومتباين

لذلك نقول أن التطبيق ت تقابل و هذا يقودنا إلى التعريف الآتي:

مفهوم أساسي

نقول عن التطبيق ت : س ⟵ ص تقابل إذا كان شاملاً ومتبايناً في الوقت نفسه.

أي إذا كان أي عنصر في المجال المقابل ص هو صورة لعنصر واحد فقط من المجال س . بمعنى أياً كان ص ∈ ص يوجد عنصر واحد فقط س ∈ س بحيث يكون ت (س) = ص

مثال (١):

إذا كان س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

ص = { ٢ ، ٦ ، ١٠ ، ١٤}

ت : س ⟵ ص بحيث ت (س) = ٢ س

١/ بيّن نوع التطبيق.

٢/ مثّل التطبيق ت بمخطط سهمي.

الحل:

١) ∵ ت (س) = ٢ س

∴ ت (١) = ٢ × ١ = ٢

ت (٣) = ٢ × ٣ = ٦

ت (٥) = ٢ × ٥ = ١٠

ت (٧) = ٢ × ٧ = ١٤

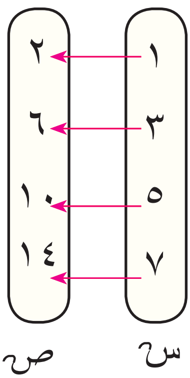
أذن ت تطبيق متباين لأنه لأي عنصرين مختلفين في المجال صورتين مختلفتين في المجال المقابل، أي كل عنصر في ص~ هو صورة لعنصر واحد فقط في س~

ت تطبيق شامل لأن المدى = المجال المقابل

∴ التطبيق شامل ومتباين

∴ التطبيق تقابل

٢) ت بمخطط سهمي:



مثال (٢):

إذا كان د : طُ ← طُ

د (س) = س + ١

بيّن ما إذا كان التطبيق د تقابلاً أم لا مع ذكر السبب

الحل :

التطبيق ت غير شامل لأن العنصر ١ في المجال المقابل طُ لا يمثل صورة لأي عنصر في المجال طُ

∵ التطبيق د غير شامل

∴ التطبيق د غير تقابل

تمرين (٦)

١) إذا كان س = {–١ ، ٠ ، ١ ، ٢}

ص = {–١ ، ٠ ، ٣}

ت : س ← ص بحيث ت (س) = س^{٢} – ١

أ/ اكتب ت بذكر عناصره في صورة من الأزواج المرتبة.

ب/ بيّن نوع التطبيق ت

٢) إذا كان س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

ص = { ٣ ، ٦ ، ١١ ، ١٨}

هـ : س ← ص بحيث هـ (س) = س^{٢} + ٢

أ/ مثّل التطبيق هـ بمخطط سهمي ب/ اكتب مدى التطبيق هـ

جـ/ اذكر نوع التطبيق هـ

٣) إذا كان س = { ١ ، ٠ ، ــ١}

ت : س ← س حيث ت (س) = س^{٢} ، حدّد الإجابة الصحيحة مما يلي:

أ/ ت : شامل ومتباين

ب/ ت : ليس شاملاً وليس متبايناً

جـ/ ت : شامل وليس متبايناً

د/ ت : متباين وليس شاملاً

٤) إذا كان س = { ٢ ، ٤ ، ٦}

ص = { ٣ ، ٥ ، ٧}

د : س ← ص حيث د = { (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ، (٦ ، ٧)} حدّد نوع التطبيق د

(١ـ ٧) تمثيل التطبيق بيانياً

درست سابقاً أنه يمكن كتابة التطبيق في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة أو في شكل مخطط سهمي.

هنالك طرق أخرى لتمثيل التطبيق بيانياً منها التمثيل الشبكي أو التمثيل بشبكة التربيع وفي هذه الحالة ترسم شبكة تربيعات كما في الشكل (١)

مثال (١):

إذا كان هنالك أربعة تلاميذ تمثلهم المجموعة س = { أ ، ب ، جـ ، د} وكانت المجموعة ص = { ٢ ، ٣ ، ١ ، ٤} تمثل عدد الكتب التي قرأها كل تلميذ على الترتيب

ت : س ⟵ ص ، معرّفة بقاعدة اقتران كل تلميذ يقترن مع عدد الكتب التي قرأها

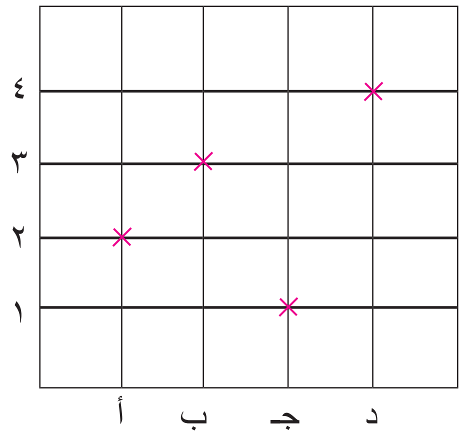
وكانت ت = { (أ ، ٢) ، (ب ، ٣) ، (جـ ، ١) ، (د ، ٤)}

فإن عناصر المجال س تُمثَّل على الخط الأفقي كما هو مبيّن في الشكل (١) وتُمثَّل عناصر المجال المقابل ص على الخط الرأسي أقصى اليسار فنجد أن الزوج (أ ، ٢) يمثّل عند تقاطع المستقيمين المارين بالنقطة أ وبالنقطة ٢ بعلامة (×)

وأيضاً (ب ، ٣) ، (جـ ، ١) ، (د ، ٤) تمثّل كذلك كلاً في موضعه.

الشكل (١) يوضح التمثيل الشبكي للتطبيق ت

ت = { (أ ، ٢) ، (ب ، ٣) ، (جـ ، ١) ، (د ، ٤)}



الشكل (١)

وقد يكون التمثيل في صورة جدول يعيّن لكل س ∈ سَ العنصر ص ∈ صَ الموجودة تحته مباشرة ويُعرّف بالتمثيل الجدولي أي تمثيل في شكل جدول كما في الجدول أدناه.

س	أ	ب	جـ	د
ص	٢	٣	١	٤

مثال (٢): لتكن سَ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

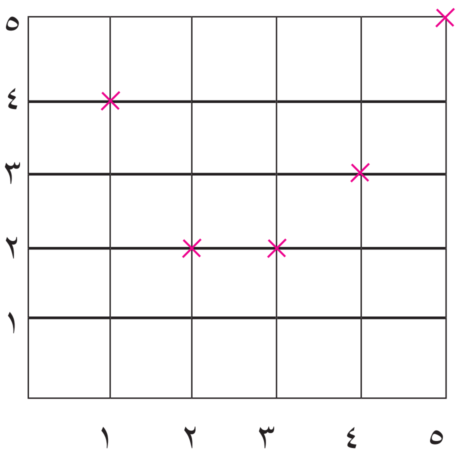
الجدول أدناه يعيّن لكل س ∈ سَ العنصر ص ∈ سَ الموجود تحته مباشرة وفق التطبيق ت : سَ ⟵ سَ

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٤	٢	٢	٣	٥

أ) ارسم بياناً شبكياً لهذا التطبيق

ب) هل مدى التطبيق يساوي مجاله المقابل ؟ هل التطبيق شامل ؟

جـ) هل هنالك عنصر في المجال المقابل هو صورة لأكثر من عنصر في المجال ؟ هل التطبيق متباين ؟



الحل:

(أ) البيان بتمثيل شبكي لهذا التطبيق

(ب) مدى التطبيق = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

المجال المقابل = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

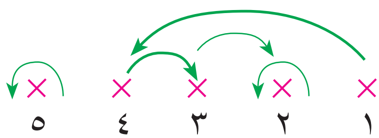
$\therefore$ مدى التطبيق $\neq$ المجال المقابل

$\therefore$ التطبيق غير شامل

(جـ) العنصر ٢ في المجال المقابل هو صورة للعنصرين ٢ ، ٣ من المجال

$\therefore$ التطبيق غير متباين

- لاحظ في هذا المثال أن التطبيق ت من س ← س أي أن المجال و المجال المقابل هو المجموعة نفسها وفي هذه الحالة يمكن تمثيله السهمي على هذه الصورة:



تدرب وتحقق من فهمك:

إذا كان ت : سَ ← سَ معرّفة بالجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٣	٤	٤	١	٥

أ) اكتب هذا التطبيق في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة.

ب) ارسم مخططاً سهمياً لهذا التطبيق

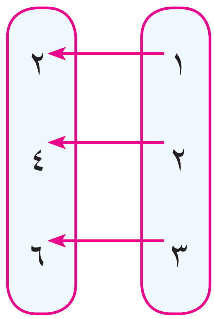
ملخص طرائق تمثيل التطبيق (بمثال):

إذا كان سَ = { ١ ، ٢ ، ٣ }

صَ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

وكانت ت : سَ ← صَ معرّفة بالقانون ت (س) = ٢س

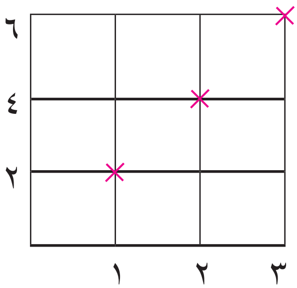
تمثيل بمخطط سهمي



تمثيل جدولي (جدول)

س	١	٢	٣
ص	٢	٤	٦

تمثيل شبكي

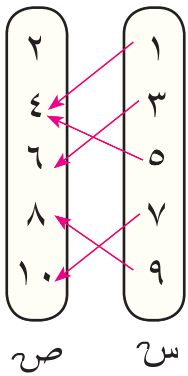


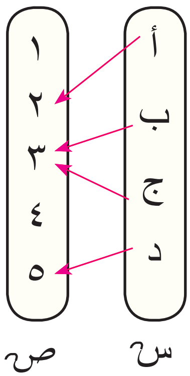
تمثيل بأزواج مرتبة

ت = { (١ ، ٢)، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦)}

تمرين (٧)

١) ارسم التمثيل الجدولي لكل من التطبيقات الممثلة بالمخططات السهمية الآتية:



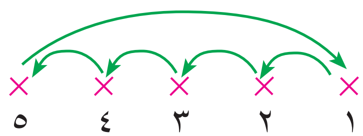


٢) ارسم التمثيل الشبكي لكل من التطبيقات في المسألة (١)

٣) بفرض أن س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

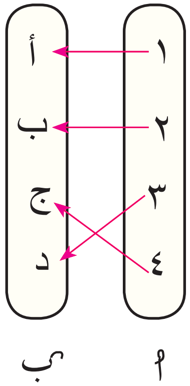
ت تطبيق من س ← س بالشكل الآتي:

مثّل هذا التطبيق شبكياً وجدولياً

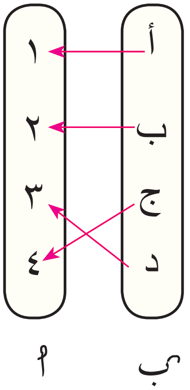


(١ ـ ٨) التطبيق العكسي

نشاط:



الشكل (١)



الشكل (٢)

تأمل المخططين السهميين الشكل (١) ، الشكل (٢)، كل مخطط منها يمثل تطبيقاً.

- تأمل التطبيق الأول (١) هل التطبيق شامل ؟ هل التطبيق متباين ؟
- قارن بين التطبيق الأول الشكل (١) والتطبيق الثاني الشكل (٢)، ماذا تلاحظ ؟
- تلاحظ أن التطبيق الأول في الشكل (١) تقابل لأنه شامل ومتباين.
- تلاحظ في التطبيق الثاني (٢) أننا عكسنا أسهم التطبيق الأول (١) ليصبح المجال المقابل مجالاً ، والمجال مجالاً مقابلاً.

نقول أن التطبيق الثاني (٢) يمثل العلاقة العكسية للتطبيق الأول (١) وهذا يقودنا إلى تعريف التطبيق العكسي.

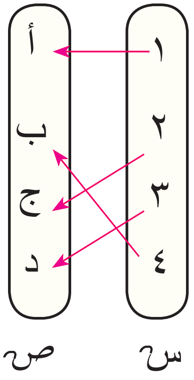
إذا كان د : أ ← ب تطبيقاً شاملاً ومتبايناً فإن التطبيق العكسي له موجود ويرمز للتطبيق العكسي من ب إلى أ بالرمز د$^{-1}$ ويكتب د$^{-1}$ = ب ← أ

تسمى د$^{-1}$ التطبيق العكسي للتطبيق د أو معكوس التطبيق د ، وعلى هذا فإن لكل تقابل د تقابل عكسي د$^{-1}$

بمعنى إذا كان التطبيق د : أ ← ب (حيث التطبيق د تقابل) فإن التطبيق العكسي د$^{-1}$: ب ← أ

مثال (١):

إذا كان ر : س ← ص ممثلاً بالمخطط السهمي في الشكل المجاور فهل يوجد معكوس لهذا التطبيق ؟



فإن وجد، جد:

١) ر$^{-1}$ (أ) ، ر$^{-1}$ (ب) ، ر$^{-1}$ (جـ) ، ر$^{-1}$ (د)

٢) ارسم المخطط السهمي للتطبيق العكسي.

الحل:

١) يتضح من المخطط السهمي للتطبيق ر أنه تقابل لأنه شامل ومتباين

∴ فالتطبيق ر$^{-1}$ موجود

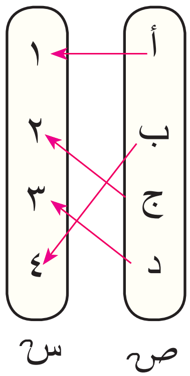
ر$^{-1}$ (أ) = ١

ر$^{-1}$ (ب) = ٤

ر$^{-1}$ (جـ) = ٢

ر$^{-1}$ (د) = ٣

٢) المخطط السهمي للتطبيق ر$^{-1}$



مثال (٢):

إذا كان س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

ص = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

وكانت د : س ⟵ ص حيث د (س) = ٢س – ١ ، جد معكوس التطبيق إن وجد.

الحل:

∵ د (س) = ٢س – ١

∴ د (١) = (٢ × ١) – ١ = ٢ – ١ = ١

د (٢) = (٢ × ٢) – ١ = ٤ – ١ = ٣

د (٣) = (٢ × ٣) – ١ = ٦ – ١ = ٥

د (٤) = (٢ × ٤) – ١ = ٨ – ١ = ٧

نلاحظ أن التطبيق د تقابل لأنه شامل ومتباين

∴ د $^{-١}$ موجود، وأن:

د $^{-١}$ (١) = ١

د $^{-١}$ (٣) = ٢

د $^{-١}$ (٥) = ٣

د $^{-١}$ (٧) = ٤

إذا تأملنا مثلاً $د^{-1}(٧) = ٤$ نجد أن قاعدة الاقتران هي:

$$\frac{(ص + ١)}{٢} \quad \text{أي أنّ} \quad \frac{٧ + ١}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$$

ويمكن أن نحصل على قاعدة الاقتران هذه إذا تتبعنا الخطوات التالية:

من قاعدة التطبيق $د(س) = ٢س - ١$

نضع $ص = د(س)$ أي $ص = ٢س - ١$

ضع س موضع القانون

$\therefore ٢س = ص + ١$

$\therefore س = \frac{ص + ١}{٢}$

وبما أن س اصبحت صورة العنصر ص بالتطبيق العكسي $د^{-1}$ أي $د^{-1}(ص) = س$

$\therefore د^{-1}(ص) = \frac{ص + ١}{٢}$

هذه الخطوات تعرف بخطوات جعل س موضعاً للقانون بعد أن كانت ص هي موضع القانون

مثال (٣):

إذا كان ت : ح ← ح تطبيقاً معرّفاً بقاعدة الاقتران الآتية:

ت (س) = ٣س + ١ . جد قاعدة اقتران التطبيق العكسي $ت^{-١}$

الحل:

بوضع ص = ت (س)

∴ ص = ٣س + ١

ضع س موضع القانون

∴ ٣س = ص − ١

∴ $س = \frac{ص - ١}{٣}$

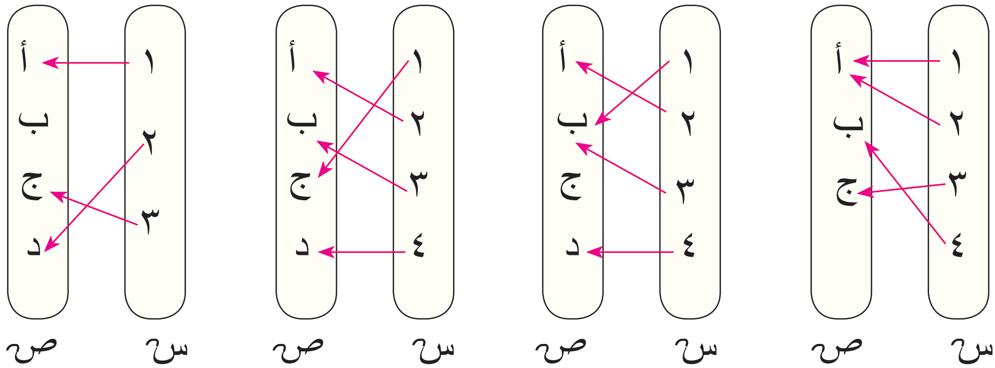
ولكن $ت^{-١}$ = (ص)

∴ $ت^{-١}(ص) = \frac{ص - ١}{٣}$

تمرين (٨)

١) إذا كان د : $س \longrightarrow ص$ تطبيقاً، متى يكون التطبيق العكسي $د^{-١}$ موجوداً ؟

٢) في الأشكال الآتية: بيّن نوع التطبيق، وجد التطبيق العكسي حيثما أمكن ذلك.



(أ) (ب) (جـ) (د)

٣) افترض أن $أ = \{٠ ، ١ ، ٢ ، ٣\}$

$ب = \{٠ ، ١ ، ٤ ، ٩\}$

عُرّف د : $أ \longrightarrow ب$ بالقانون $د(س) = س^٢$

هل يوجد التطبيق العكسي $د^{-١}$ ؟ ولماذا ؟

إذا كانت الإجابة نعم، جد $د^{-١}(١)$ ، $د^{-١}(٩)$ ثم هات قانوناً نعرّف به $د^{-١}$

٤) افترض أن ت : $ص \longrightarrow ص$ معرّفاً بالقانون $د(س) = س - ١$

أ/ جد : ت (-٥) ، ت (-١) ، ت (٠) ، ت (٧)

ب/ هل التطبيق العكسي $ت^{-١}$ موجود ؟

إذا كان $ت^{-١}$ موجوداً فجد: $ت^{-١}(-٦)$ ، ت (٣)

اكتب القانون الذي يعرّف $ت^{-١}$.

تمرين عام

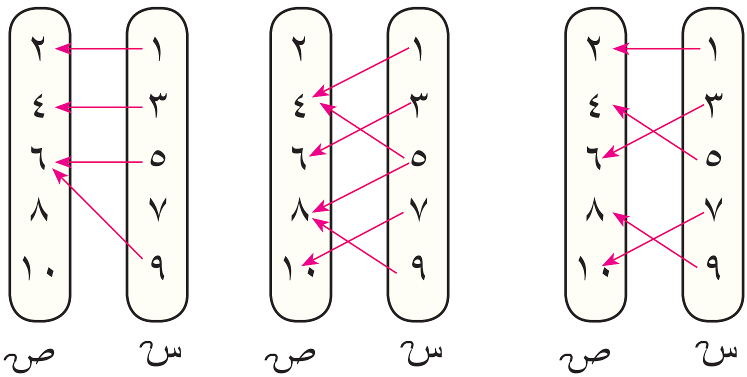
١. إذا كان ر : ص ← ص بحيث ر (س) = س^{٢} – ١

جد: ر (١) ، ر (-٢)

٢. إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

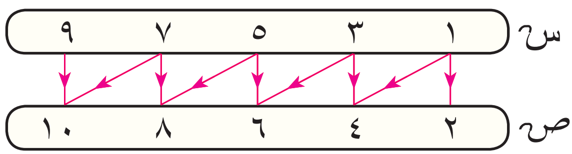
ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

وضّح أي المخططات السهمية الآتية تمثل تطبيقاً من س إلى ص معللاً لإجابتك، وعيّن المدى لكل تطبيق.



(أ) (ب) (جـ)

(د)



٣. إذا كان س = { أ ، ب ، جـ } ، ص = { ١ ، ٢ }

ارسم بمخططات سهمية ٥ تطبيقات مختلفة من س إلى ص

٤. لنفترض أن ق : ح ← ح معرّف بالعبارة ق (س) = $س^{٢}$ − ٤س + ١ ،

جد ق (-٣) ق (٤)

٥. لنفترض أن د : ح ← ح معرّف بالعبارة

د (س) = { $س^{٢}$ إذا كانت س ≥ ٢ .
س + ٢ إذا كانت س < ٢ .

جد: د (٥) ، د (٠) ، د (-١)

٦. التطبيق هـ : أ ← أ معرّف بالجدول التالي حيث أ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

أ	١	٢	٣	٤
أ	٢	٣	١	٢

ارسم بياناً شبكياً لهذا التطبيق.

أ/ اكتب مدى التطبيق هـ .

ب/ ما نوع هذا التطبيق ؟

جـ/ اكمل رسم المخطط السهمي التالي للتطبيق هـ

٧. إذا كان د : ن ← ن معرّف بالقاعدة التالية:

د (س) = ٣س − ٢

أ/ جد قاعدة التطبيق العكسي له.

ب/ جد: د (٢) ، $د^{-١}$ (٢) ، $د^{-١}$ ($\frac{١}{٣}$) ، $د^{-١}$ (٠)

الوحدة الثانية

الأسس واللوغريثمات

(٢- ١) الأساس والقوة

تمهيد

بتحليل الأعداد ٦٤، ٢٧، ١٠٠، ٦٢٥ نتحصل على الآتي:

٦٤ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢

٢٧ = ٣ × ٣ × ٣

١٠٠ = ١٠ × ١٠

٦٢٥ = ٥ × ٥ × ٥ × ٥

١) كم مرّة ضُرب العدد ٢ في نفسه ؟
٢) كم مرّة ضُرب العدد ٣ في نفسه كعامل أساس ؟
٣) كم مرّة ضُرب العدد ١٠ في نفسه ؟
٤) كم مرّة ضُرب العدد ٥ في نفسه ؟
يمكن كتابة العدد ٦٤ بالصورة: ٦٤ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = $٢^{٦}$

تحقق من فهمك :

١) العدد ٢٧ يعني:

أ/ $٣^{٢}$ ب/ $٣^{٤}$ جـ/ $٣^{٥}$ د/ $٣^{٣}$

٢) العدد ٦٢٥ يساوي:

أ/ $٥^{٢}$ ب/ $٥^{٣}$ جـ/ ٥ د/ $٥^{٤}$

مثـــال (١):

حلل الأعداد الآتية إلى عواملها الأولية:

٩ ، ١٢٥ ، ٨١ ، ٢٥٦

من المثال نلاحظ أنّ:

١) ٩ = $٣^{٢}$ نُسمّي $٣^{٢}$ القوة الثانية للعدد ٣ ويُسمّى العدد ٣ الأساس كما يُسمّى العدد ٢ الأس وتقرأ ٣ أس ٢ أو ٣ تربيع أو ٣ مرفوعة للقوة ٢ (نستعمل كلمة قوة لتعني الأس)

٢) ١٢٥ = ٥ ^{٣} ٥ ^{٣} نُسمّي ٥ ^{٣} القوة الثالثة للعدد ٥ ، ويُسمّى العدد ٥ الأساس كما يُسمّى العدد ٣ الأس (القوة) وتقرأ ٥ أس ٣ أو ٥ تكعيب أو ٥ مرفوعة للقوة ٣

٨١ = ٣ ^{٤} = ٣ × ٣ × ٣ × ٣

مفهوم أساسي

أ ^{ن} تسمّى القوة النونية للعدد أ ويُسمّى أ الأساس ويُسمّى ن الأس وتقرأ أ أس ن أو القوة النونية للعدد أ

تحقق من فهمك :

١) اكتب نواتج الضرب الآتية مستخدماً الأُسس:

أ/ ٦ × ٦ × ٦ × ٦ ب/ $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣}$

٢) اكتب في صورة حاصل ضرب الأساس في نفسه ثم أوجد قيمة ناتج حاصل الضرب

أ/ ٢ ^{٣} ب/ ٨ ^{٢} جـ/ $\left(\frac{١}{٤}\right)^{٤}$

٣) المسافة بين مدينتي عطبرة والخرطوم ٣ × ١٠ ^{٢} كلم تقريباً أوجد قيمة ٣ × ١٠ ^{٢}

٤) إذا علمت أنه يوجد ٣ ^{٦} نوعاً من القرود تقريباً تعيش على سطح الأرض فما عدد أنواع القرود ؟

٥) يسكن مدينة سنار ١٠ ^{٥} نسمة تقريباً فما العدد التقريبي لسكان مدينة سنار ؟

٦) أكمل الجدول أدناه:

القوة	تُقرأ	تُسمّى
٢ ^{٥}		
٣ ^{٢}		
١٠ ^{٣}		
س ^{٤}		

مثـــــال (٢):

أوجد قيمة كل من العبارات:

أ/ ٢ ^{٣} ب/ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$ جـ/ $(-٥)^{٢}$

الحل:

أ/ $٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$

ب/ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$

جـ/ $(-٥)^{٢} = -٥ \times -٥ = ٢٥$

تمرين (١)

١) اوجد قيمة ما يلي:

أ/ $٣^{٥}$ ب/ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}$ جـ/ $(-٢)^{٣}$ د/ $٦^{٢}$

٢) المسافة بين مدينتين ٤×١٠^{٣} كيلومتر فما قيمة ٤×١٠^{٣} بالكيلومترات ؟

٣) مدينة ما عدد سكانها يبلغ $١٠^{٧}$ نسمة أوجد عدد سكان هذه المدينة.

(٢ - ٢) ضرب القوى

مفهوم اساسي

ضرب الأعداد ذات الأساس الموحّد:

التعبير اللفظي: عند ضرب أعدادٍ ذات أساس موحّد نضع الأساس الموحّد ونجمع القوى (الأسس)

التعبير الرمزي: لأي عدد حقيقي أ، وأي عددين صحيحين م ، ن فإن:

$$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن} \quad ، \quad أ^{م+ن} = أ^{م} \times أ^{ن}$$

أمثلة: $س^{٣} \times س^{٥} = س^{٣+٥} = س^{٨}$ ، $ب^{٢} \times ب^{٤} = ب^{٢+٤} = ب^{٦}$

مثـــــال:

بسّط كل عبارة مما يلي:

١) $(٦ س^{٣}) \times (٢ س^{٧})$

٢) $٧^{٢} \times ٧^{٩}$

٣) $ص^{٧} \times ص^{٣}$

٤) $(٣ ب هـ^{٣}) \times (ب^{٣} هـ^{٤})$

الحل:

١) $(٦ س^{٣}) \times (٢ س^{٧}) = (٦ \times ٢) (س^{٣+٧}) = ١٢ س^{١٠}$

٢) $٧^{٢} \times ٧^{٩} = ٧^{٢+٩} = ٧^{١١}$

٣) $ص^{٧} \times ص^{٣} = ص^{٧+٣} = ص^{١٠}$

٤) $(٣ ب هـ^{٣}) \times (ب^{٣} هـ^{٤}) = (٣ \times ١) (ب \times ب^{٣}) (هـ^{٣} \times هـ^{٤})$

$= (٣ \times ١) (ب^{١+٣}) (هـ^{٣+٤}) = ٣ ب^{٤} هـ^{٧}$

تمرين (٢)

بسّط ما يلي:

١) $٢ س^{٥} \times س^{٣}$

٢) $٧^{٣} \times ٧^{٢}$

٣) $٢^{٦} \times ٢^{٤} \times ٢^{٧}$

٤) $(-٤ ر س^{٢} ن^{٣}) (-٦ ر^{٥} س^{٢} ن)$

٥) $٩ أ^{٢} \times ٣^{٤} أ^{٣}$

٦) $٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ + س \times س$

٧) $(٢ أ ب^{٥}) (-٣ أ^{٦} ب^{٨})$

(٢- ٣) رفع قوة لقوة

يمكن استخدام ضرب القوى لإيجاد رفع قوة لقوة أخرى نعلم أن:

١) $(٣^{٢})^{٤} = ٣^{٢} \times ٣^{٢} \times ٣^{٢} \times ٣^{٢} = ٣^{٢+٢+٢+٢} = ٣^{٨}$

٢) $(ر^{٤})^{٣} = ر^{٤} \times ر^{٤} \times ر^{٤} = ر^{٤+٤+٤} = ر^{١٢}$

- ما العلاقة التي تربط بين الأعداد ٢ ، ٤ ، ٨ في (١) ؟
- ما العلاقة التي تربط بين الأعداد ٤ ، ٣ ، ١٢ في (٢) ؟

مفهوم أساسي

رفع قوة إلى قوة أخرى:

التعبير اللفظي: عندما نرفع قوة الأعداد إلى قوة الأقواس نضع الأساس ونضرب القوة الداخلية (الأُس الداخلي) في القوة الخارجية (الأُس الخارجي)

التعبير الرمزي: $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$

أمثلة:

$(س^{٣})^{٥} = س^{٣\times٥} = س^{١٥}$ ، $(ب^{٦})^{٧} = ب^{٦\times٧} = ب^{٤٢}$

مثـــــال:

ضع ما يأتي في أبسط صورة:

أ/ $(س^{٤})^{٣}$ ب/ $(٢^{٢})^{٥}$ جـ/ $((٧^{٥})^{٢})^{١٠}$

الحل:

أ) $(س^{٤})^{٣} = س^{٤} \times س^{٤} \times س^{٤} = س^{٤+٤+٤} = س^{١٢}$

$(س^{٤})^{٣} = س^{٤\times٣} = س^{١٢}$

ب) $(٢^{٢})^{٥} = ٢^{٢\times٥} = ٢^{١٠} = ١٠٢٤$

ج) $((٧^{٥})^{٢})^{١٠} = (٧^{٥\times٢})^{١٠} = (٧^{١٠})^{١٠} = ٧^{١٠٠}$

تحقق من فهمك :

أوجد قيمة: $(٣^{٢})^{٣}$ ، $(٣^{٣})^{٢}$ ، قارن بينهما وماذا تستنتج ؟

تمرين (٣)

١) أكمل الآتي:

أ. $(ب^{٥})^{٤} =$ ....

ب. $(س^{١٢})^{٢} =$ ....

ج. $(أ^{م})^{٣} =$ ....

د. $(أ^{٤})^{ن} =$ ....

٢) ضع ما يأتي في أبسط صورة:

أ/ $\left(٤_{س}\right)^{٣}$ ب/ $\left(٢_{هـ}\right)^{٥}$ جـ/ $((٧^{٢})^{٣})^{١٠}$

(٢- ٤) ضرب أعداد ذات أساسات مختلفة وقوة موحّدة

نعلم أن:

(ن و)^{٣} = ن و × ن و × ن و

= (ن × ن × ن) (و × و × و)

= ن^{٣} و^{٣}

(٢ أ ب^{٢})^{٢} = (٢ أ ب^{٢}) (٢ أ ب^{٢})

= (٢ × ٢) (أ × أ) (ب^{٢} × ب^{٢})

= ٢^{٢} أ^{٢} ب^{٤}

تحقق من فهمك :

١) (س ص)^{٥} تساوي:

أ/ س^{٥} × ص^{٥} ب/ س^{٥} × ص جـ/ س × ص^{٥} د/ س ص

٢) (س + ص)^{٢} تساوي:

أ/ س^{٢} + ص^{٢} ب/ س^{٢} + ص جـ/ س + ص^{٢} د/ (س + ص) (س + ص)

مفهوم أساسي

قوة حاصل الضرب:

تعبير لفظي: عند ضرب أعداد ذات أساس مختلف وقوة موحّدة نضرب الأساسات مع وضع نفس الأُس

تعبير رمزي: لأي عددين حقيقيين أ ، ب وأي عدد صحيح ن فإن:

أ^{ن} × ب^{ن} = (أ × ب)^{ن} = (أ ب)^{ن}

(أ ب)^{ن} = أ^{ن} × ب^{ن}

تحقق من فهمك :

بسّط ما يلي:

١) $س^{٥} \times أ^{٥} \times ص^{٥}$

٢) $(س^{٢})^{٣} \times ص^{٦}$

٣) $س^{٢} \times س^{٥} \times ص^{٧}$

٤) $(\frac{١}{٢} أ^{٢} ب^{٢})^{٣} [(-٤ ب^{٢})]^{٢}$

مثـــــال:

بسّط العبارات التالية:

أ/ $س^{٣} \times ص^{٣}$ ب/ $(س^{٣})^{٤} \times ص^{١٢}$ جـ/ $س^{٥} \times ص^{٥} \times ٢^{٥}$

الحل:

أ) $س^{٣} \times ص^{٣} = (س ص)^{٣}$

ب) $(س^{٣})^{٤} \times ص^{١٢} = س^{١٢} \times ص^{١٢} = (س ص)^{١٢}$

ج) $س^{٥} \times ص^{٥} \times ٢^{٥} = (٢ س ص)^{٥}$

تمرين (٤)

جد مفكوك:

١) $(س ص ع)^{\frac{١}{٢}}$ ٢) $(-٣ ب^{٤})^{٢}$

٣) $(٢ أ^{٣})^{٤} (أ^{٣})^{٣}$ ٤) $(٢ جـ هـ^{٤})^{٣} [(-٢ جـ^{٤} هـ)^{٣}]^{٢}$

٥) $(-\frac{٣}{٤} ص)^{٣}$ ٦) $(د م ن)^{٥}$

(٢ ـ ٥) قسمة القوى

معلوم أن:

$$\frac{٢^{٧}}{٢^{٤}} = \frac{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢} = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٣}$$

- ما هو الأساس في عملية القسمة ؟
- ما العلاقة بين ٧ ، ٤ ، ٣ ؟

مفهوم أساسي

قسمة القوى:

التعبير اللفظي: عند قسمة أعداد ذات أساس موحّد، نضع الأساس الموحّد ثم أطرح قوتيهما (أسيهما) (أس البسط – أس المقام)

التعبير الرمزي: لأي عدد حقيقي أ وأي عددين صحيحين م ، ن فإن:

$$\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن} \quad ، \quad أ^{م-ن} = \frac{أ^{م}}{أ^{ن}}$$

مثـــــال:

بسّط ما يلي مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً:

١/ $\frac{جـ^{٩}}{جـ^{٢}}$ ٢/ $\frac{جـ^{٣} هـ^{٥}}{جـ هـ^{٢}}$ ٣/ $\frac{س^{-١}}{س^{-٦}}$

الحل:

١) $\frac{جـ^{٩}}{جـ^{٢}} = جـ^{٩-٢} = جـ^{٧}$

٢) $\frac{جـ^{٣} هـ^{٥}}{جـ هـ^{٢}} = \left(\frac{جـ^{٣}}{جـ}\right)\left(\frac{هـ^{٥}}{هـ^{٢}}\right) = (جـ^{٣-١})(هـ^{٥-٢}) = جـ^{٢} هـ^{٣}$

٣) $\frac{س^{-١}}{س^{-٦}} = س^{-١-(-٦)} = س^{-١+٦} = س^{٥}$

تمرين (٥)

بسّط ما يلي:

١) $\frac{س^{٣} ص^{٤}}{س^{٢} ص}$

٢) $\frac{ك^{٧} م^{١٠} ب^{٢}}{ك^{٥} م^{٣} ب}$

٣) $\frac{٢س^{٣}}{٢^{٣} س^{-٣}}$

٤) $\frac{١٠^{٧} \times ١٠^{٣}}{١٠^{-٥}}$

٥) $\frac{س^{٧}}{س^{٣}}$

٦) $\frac{ص^{٨}}{ص^{٥}}$

٧) $\frac{ل^{-١}}{ل^{-٣}}$

٨) $\frac{هـ^{٢}}{هـ^{-٥}}$

(٢-٦) (أ) الأس الصفري

يمكن تبسيط $\frac{٧^{٣}}{٧^{٣}}$ بطريقتين:

الطريقة (١): $\frac{٧^{٣}}{٧^{٣}} = ٧^{٣-٣} = ٧^{٠}$

الطريقة (٢): $\frac{٧^{٣}}{٧^{٣}} = \frac{٧ \times ٧ \times ٧}{٧ \times ٧ \times ٧} = ١$

ماذا تستنتج من الطريقة (١) والطريقة (٢) ؟

نستنتج أن $٧^{٠} = ١$

مفهوم أساسي

الأس الصفري:

التعبير اللفظي: أي عدد غير الصفر مرفوع للقوة صفر يساوي ١

التعبير الرمزي: لأي عدد حقيقي أ ، أ $\neq$ ٠ فإن: $أ^{٠} = ١$

أمثلة: $٨^{٠} = ١$ ، $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٠} = ١$ ، $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٠} = ١$

مثـــــال:

بسّط كل عبارة مما يلي:

١/ $\left(\frac{٢ س^{٢} ص^{٥} ع^{٢}}{٩ س^{٣} ص^{٢} ع}\right)^{٠}$ ٢/ $\frac{س^{٥} ص^{٠}}{س^{٣}}$ ٣/ $\left(\frac{-٦}{٧}\right)^{٠}$

الحل:

١) $\left(\frac{٢ س^{٢} ص^{٥} ع^{٢}}{٩ س^{٣} ص^{٢} ع}\right)^{٠} = ١$

٢) $\frac{س^{٥} ص^{٠}}{س^{٣}} = \frac{س^{٥} (١)}{س^{٣}} = س^{٥-٣} = س^{٢}$

٣) $\left(\frac{-٦}{٧}\right)^{٠} = ١$

(ب) الأسس السالبة:

يمكن تبسيط العبارة $\frac{س^{٢}}{س^{٥}}$ بطريقتين:

الطريقة (١): $\frac{س^{٢}}{س^{٥}} = س^{٢-٥} = س^{-٣}$

الطريقة (٢): $\frac{س^{٢}}{س^{٥}} = \frac{س \times س}{س \times س \times س \times س \times س} = \frac{١}{س^{٣}}$

ماذا تستنتج من الطريقة (١) والطريقة (٢) ؟

نستنتج أن $س^{-٣} = \frac{١}{س^{٣}}$

مفهوم أساسي

الأسس السالبة:

التعبير اللفظي: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر، ولأي عدد صحيح ن فإن مقلوب $أ^{ن}$ هو $أ^{-ن}$ ومقلوب $أ^{-ن}$ هو $أ^{ن}$

التعبير الرمزي: $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، $\frac{١}{أ^{-ن}} = أ^{ن}$

أمثلة: $٣^{-٤} = \frac{١}{٣^{٤}}$ ، $\frac{١}{س^{-٥}} = س^{٥}$

ارشاد:

تعد العبارة في أبسط صورة لها إذا احتوت على أسس موجبة فقط وظهر كل أساس مرة واحدة فقط ولا تتضمن قوة القوة وأن تكون جميع الكسور الاعتيادية فيها في أبسط صورة.

تحقق من فهمك :

بسّط كل عبارة مما يلي:

أ/ $\frac{س^{-٣}\ ص\ ع^{٢}}{ص\ م^{-٦}}$ ب/ $\frac{٣٢\ د^{-٨}\ ب^{٣}\ جـ^{-٤}}{٤\ د^{٢}\ ب^{٥}\ جـ^{-٢}}$

مثـــــال:

بسّط كل عبارة مما يلي:

أ/ $٧^{-٢}$ ب/ $\frac{س^{٠}}{ص^{-٣}}$ جـ/ $\frac{١}{٢^{-٧}}$

د/ $\frac{ن^{-٥}\ ف^{٤}}{ر^{-٢}}$ هـ/ $\frac{٢د^{٢}\ ب^{٣}\ جـ^{-٥}}{١٠د^{-٣}\ ب^{-١}\ جـ^{-٤}}$

الحل:

أ) $٧^{-٢} = \frac{١}{٧^{٢}}$

ب) $\frac{س^{٠}}{ص^{-٣}} = \frac{١}{ص^{-٣}} = ص^{٣}$

ج) $\frac{١}{٢^{-٧}} = ٢^{-(-٧)} = ٢^{٧}$

د) $\frac{ن^{-٥}ف^{٤}}{ر^{-٢}} = \left(\frac{ن^{-٥}}{١}\right)\left(\frac{ف^{٤}}{١}\right)\left(\frac{١}{ر^{-٢}}\right) = \left(\frac{١}{ن^{٥}}\right)\left(\frac{ف^{٤}}{١}\right)\left(\frac{ر^{٢}}{١}\right) = \frac{ف^{٤}ر^{٢}}{ن^{٥}}$

هـ) $\frac{٢د^{٢}ب^{٣}جـ^{-٥}}{١٠د^{-٣}ب^{-١}جـ^{-٤}} = \left(\frac{٢}{١٠}\right)\left(\frac{د^{٢}}{د^{-٣}}\right)\left(\frac{ب^{٣}}{ب^{-١}}\right)\left(\frac{جـ^{-٥}}{جـ^{-٤}}\right)$

$= \left(\frac{١}{٥}\right)(د^{٢-(-٣)})(ب^{٣-(-١)})(جـ^{-٥-(-٤)})$

$= \left(\frac{١}{٥}\right)د^{٥}ب^{٤}(جـ^{-١}) = \left(\frac{١}{٥}\right)د^{٥}ب^{٤}\left(\frac{١}{جـ}\right) = \frac{د^{٥}ب^{٤}}{٥جـ}$

تمرين (٦)

بسّط كلاً مما يلي:

١) $\text{س}^{٠}$

٢) $\text{ص}^{-٣}$

٣) $\text{م}^{-٥}\ \text{ن}^{٠}$

٤) $\dfrac{\text{ص}^{-٢}}{\text{ص}^{٥}}$

٥) $\dfrac{\text{ع}^{٢}}{\text{ع}^{-٤}}$

٦) $\dfrac{١}{\text{هـ}^{-٢}}$

٧) $\text{س}^{٠} \times ٧^{٢}$

٨) $\dfrac{٣٦\text{س}^{٢}\ \text{ص}^{٤}}{٨\ \text{س}^{٥}\ \text{ص}}$

(٢-٧) قسمة الأعداد ذات القوة الموحدة

يمكن استخدام تعريف القوى لإيجاد ناتج قسمة وحيدات الحد في المثالين أدناه:

$$\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٣} = \left(\frac{٣}{٤}\right) \times \left(\frac{٣}{٤}\right) \times \left(\frac{٣}{٤}\right) = \frac{٣\times٣\times٣}{٤\times٤\times٤} = \frac{٣^{٣}}{٤^{٣}}$$

$$\left(\frac{س}{ص}\right)^{٢} = \left(\frac{س}{ص}\right) \times \left(\frac{س}{ص}\right) = \frac{س\times س}{ص\times ص} = \frac{س^{٢}}{ص^{٢}}$$

مفهوم أساسي

قوى القسمة:

التعبير اللفظي: إذا رفع حاصل قسمة عددين مختلفين لأس معين (قوة معينة) يرفع كل منهما لنفس الأس (القوة)

التعبير الرمزي: لأي عددين حقيقيين أ ، ب $\neq$ صفر ، وأي عدد صحيح م فإن:

$$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}} \quad ، \quad \frac{أ^{م}}{ب^{م}} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} \quad ، \quad ب \neq ٠$$

مثـــــال:

اختصر:

١/ $\frac{٢^{٣}}{٣^{٣}}$ ٢/ $\frac{أ^{٣}ب^{٣}}{جـ^{٣}}$ ٣/ $\frac{أ^{٥}م^{٩}}{م^{٤}}$ ٤/ $\frac{٢س}{٨س^{٣}}$ ٥/ $\frac{جـ^{٢}ب^{٣}د^{٢}}{جـ^{٤}ب^{٣}د^{٤}}$

الحل:

١) $\frac{٢^{٣}}{٣^{٣}} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}$

٢) $\frac{أ^{٣}ب^{٣}}{جـ^{٣}} = \frac{(أ ب)^{٣}}{جـ^{٣}} = \left(\frac{أ ب}{جـ}\right)^{٣}$

٣) $\frac{أ^{٥}م^{٩}}{م^{٤}} = أ^{٥}(م)^{٩-٤} = أ^{٥}م^{٥} = (أ م)^{٥}$

٤) $\frac{٢\text{س}}{٨\text{س}^{٣}} = \frac{٢\text{س}}{٢^{٣}\text{س}^{٣}} = ٢ \times ٢^{-٣} \times \text{س} \times \text{س}^{-٣} = ٢^{١+(-٣)} \times \text{س}^{١+(-٣)}$

$= ٢^{-٢} \times \text{س}^{-٢} = (٢\text{س})^{-٢} = \left(\frac{١}{٢\text{س}}\right)^{٢}$

٥) $\frac{\text{جـ}^{٢}\,\text{ب}^{٣}\,\text{د}^{٢}}{\text{جـ}^{٤}\,\text{ب}^{٣}\,\text{د}^{٤}} = \text{جـ}^{٢-٤}\,\text{ب}^{٣-٣}\,\text{د}^{٢-٤} = \text{جـ}^{-٢}\,\text{ب}^{٠}\,\text{د}^{-٢} = \text{جـ}^{-٢} \times ١ \times \text{د}^{-٢}$

$= \text{جـ}^{-٢}\,\text{د}^{-٢} = (\text{جـ د})^{-٢} = \left(\frac{١}{\text{جـ د}}\right)^{٢}$

تمرين (٧)

اختصر:

أ/ $\frac{\text{س}^{٧}}{\text{ص}^{٧}}$ ب/ $\frac{٢^{٥}}{٣^{٥}}$ جـ/ $\frac{٧^{١١}}{١٤^{١١}}$ د/ $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{-٢}$

هـ/ $\frac{\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٣}}{\text{ع}^{٣}}$ و/ $\frac{\text{ل}^{١٢}}{\text{هـ}^{١٢}}$

(٢ ـ ٨) مراجعة تراكمية

مثال(١): أي مما يلي قيمته تساوي $\frac{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}}{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}}$

أ/ $\frac{٣}{٢}$ ب/ $\frac{٢}{٣}$ جـ/ $\frac{٣٢}{٢٤٣}$ د/ $(١)^{\frac{٢}{٣}}$

الحل:

$$\frac{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}}{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢ - ٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{-١} = \frac{٢^{-١}}{٣^{-١}} = \frac{٣}{٢}$$

مثـــال (٢):

أي المقادير الآتية قيمتها تساوي نفس قيمة $\left[\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}\right]^{٣}$

أ/ $\frac{٢^{٦}}{٣^{٦}}$ ب/ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥}$ جـ/ $\frac{٢^{٨}}{٣^{٨}}$ د/ $\left(\frac{٤}{٦}\right)^{٣}$

الحل:

$$\left[\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}\right]^{٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦} = \frac{٢^{٦}}{٣^{٦}}$$

مثـــال (٣):

زاوج بين العمود (أ) وما يناسبه من العمود (ب) إذا علمت أن ن = ٢

العمود (أ)	العمود (ب)
$\frac{٣^{ن}}{٣}$	$٣^{-١}$
$\frac{٣}{٣^{ن}}$	١
$٣^{-١} \times ٣$	٣

تدريب:

أ) بسّط العبارة $\left(\frac{أ^م}{ب^ن}\right)^{٢ن}$ موضحاً كل خطوة، علماً بأن أ ، ب عددين حقيقيين غير صفريين، م ، ن عددان صحيحان

ب) اكتب ثلاثة عبارات مختلفة يمكن تبسيطها إلى $س^٦$

تمرين (٨)

١) اختصر ما يلي:

أ/ $\frac{١٠^٤ \times ١٠^٣}{١٠^٢ \times ١٠^٥}$

ب/ $\frac{٣٦ س^٢ ص^٤}{٩ س^{-٥} ص^٢}$

ج/ $س^٢ س^٠$

د/ $س^{-٣} س^{-٧}$

هـ/ $(س^٠)^٧$

و/ $(٢^{-١})^{-٢}$

ز/ $(٢س^٢ ص)^٠$

٢) جد مربع كلاً من الآتي:

أ) $٢س^٣$

ب) $س^{-١} ص^{\frac{١}{٢}}$

٣) جد مكعب كلاً من الآتي:

أ/ $س^{\frac{٢}{٣}}$ ب/ ٣

(٢ـ ٩) اللوغريثم

لوغريثم العدد لأي أساس هو عدد مرات تكرار هذا الأساس، أو لوغريثم العدد لأساس معين هو القوة (الأس) التي يجب أن يرفع لها الأساس لنحصل على ذلك العدد.

مثلاً $٨ = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٣}$ فالرقم ٣ هو الأس (القوة) أما الرقم ٢ فهو الأساس ويمكن التعبير عن $٨ = ٢^{٣}$ باللوغريثمات حيث ٣ هو لوغريثم العدد ٨ للأساس ٢

اللفظ (لو) هو اختصار كلمة لوغريثم ويجب ملاحظة الأساس يكتب أسفل الرمز (لو) إلى اليسار $لو_{٢}\,٨ = ٣$

مفهوم أساسي

اللوغريثم:

التعبير اللفظي: اللوغريثم هو القوة (الأس) التي يرفع إليها الأساس ليعطي العدد.

التعبير الرمزي: إذا كان $ص = أ^{ن}$ حيث $أ > ٠$ ، $أ \neq ١$ ، ن عدد حقيقي فإن:

$لو_{أ}\,ص = ن$

ن هي لوغريثم العدد ص للأساس أ

$ص = أ^{ن} \Leftrightarrow$ (تكافؤ) $لو_{أ}\,ص = ن$

أمثلة: $١٢٥ = ٥^{٣} \Leftrightarrow لو_{٥}\,١٢٥ = ٣$

الصورة الأسية	الصورة اللوغريثمية
$س = أ^{ن}$	$لو_{أ}\,س = ن$
$١٦ = ٢^{٤}$	$لو_{٢}\,١٦ = ٤$
$العدد = (الأساس)^{الأس}$	$لو_{الأساس}\,العدد = الأس$

مثـــال (١):

حوّل كلاً مما يلي إلى الصورة اللوغريثمية:

أ/ $١٢٥ = ٥^{٣}$ ب/ $٢^{-٣} = \frac{١}{٨}$ جـ/ $٩^{صفر} = ١$

الحل:

أ) $١٢٥ = ٥^{٣} \Leftrightarrow لو_{٥}١٢٥ = ٣$

ب) $٢^{-٣} = \frac{١}{٨} \Leftrightarrow لو_{٢}\frac{١}{٨} = -٣$

ج) $٩^{صفر} = ١ \Leftrightarrow لو_{٩}١ = صفر$

مثـــال (٢):

اكتب كلاً مما يلي في الصورة الأسية:

أ/ $لو_{٤}١٦ = ٢$ ب/ $لو_{٢٧}\frac{١}{٩} = -\frac{٢}{٣}$

الحل:

أ) $لو_{٤}١٦ = ٢ \Leftrightarrow ١٦ = ٤^{٢}$

ب) $لو_{٢٧}\frac{١}{٩} = -\frac{٢}{٣} \Leftrightarrow \frac{١}{٩} = (٢٧)^{-\frac{٢}{٣}}$

مفهوم أساسي

مقابل اللوغريثم:

من التعبير الرمزي $ص = أ^{ن} \Leftrightarrow لو_{أ}ص = ن$

العدد ص يعرف بمقابل اللوغريثم ن للأساس أ

مثـــال:

$لو_{٢}١٢٨ = ٧$ $\therefore$ مقابل ٧ للأساس ٢ = $٢^{٧} = ١٢٨$

لـو$_{٩}$ ٨١ = ٢ ∴ مقابل ٢ للأساس ٩ = ٩^{٢} = ٨١

لـو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = ٣ ∴ مقابل ٣ للأساس ١٠ = ١٠^{٣} = ١٠٠٠

لـو$_{١٠}$ ١٠ = ١ ∴ مقابل ١ للأساس ١٠ = ١٠^{١} = ١٠

تحقق من فهمك:

لـو$_{٢}$ ٢ = ١ ، لـو$_{٧}$ ٧ = ١ ، لـو$_{أ}$ أ = ١ ماذا تلاحظ ؟

تمرين (٩)

١) اكمل ما يأتي:

أ) لو$_{٨}$ ٨ = ١ ∴ مقابل ١ للأساس ٨ = ...

ب) لـو$_{٣}$ .... = ٤ ∴ مقابل ٤ للأساس .... = ٨١

ج) لـو$_{٢}$ ٤ = ... ∴ مقابل .... للأساس ٢ = ...

٢) إذا كان مقابل ٢ هو ١٠٠ فما الأساس

٣) ما اللوغريثم إذا كان المقابل للأساس ٨ هو ٨ ؟

٤) حوّل العلاقات الأسية التالية إلى الصورة اللوغريثمية:

أ/ ٢٥٦ = ٢^{٨} ب/ ٧^{٣} = ٣٤٣ جـ/ ١٠^{٢} = ١٠٠

٥) حوّل العلاقات اللوغريثمية التالية إلى الصورة الأسية:

أ/ لـو$_{٣}$ ٢٤٣ = ٥ ب/ لـو$_{٢}$ ٣٢ = ٥ جـ/ ٢ = لـو$_{٧}$ ٤٩

(٢-١٠) اللوغريثمات المعتادة (اللوغريثم العشري)

اللوغريثم الذي يكون أساسه العدد ١٠ هو الأكثر شيوعاً أو أكثر اللوغريثمات استخداماً وعادة تكتب اللوغريثمات التي أساسها ١٠ بدون كتابة الأساس.

مثلاً: لــو$_{١٠}$أ   تكتب لو أ

انظر الآتي:

لو ١٠٠٠ = ٣   وذلك لأن ١٠٠٠ = $١٠^{٣}$

لو ١٠٠ = ٢   وذلك لأن ١٠٠ = $١٠^{٢}$

لو ١٠ = ١   وذلك لأن ١٠ = $١٠^{١}$

لو ١ = صفر   وذلك لأن ١ = $١٠^{٠}$

لو ٠,١ = -١   وذلك لأن ٠,١ = $\frac{١}{١٠} = ١٠^{-١}$

لو ٠,٠١ = -٢   وذلك لأن ٠,٠١ = $\frac{١}{١٠٠} = \frac{١}{١٠^{٢}} = ١٠^{-٢}$

لو ٠,٠٠١ = -٣   وذلك لأن ٠,٠٠١ = $\frac{١}{١٠٠٠} = \frac{١}{١٠^{٣}} = ١٠^{-٣}$

- ماذا تلاحظ في لوغريثمات الأعداد التي هي أكبر من الواحد ؟
- ماذا تلاحظ في لوغريثمات الأعداد التي هي أصغر من الواحد ؟

تحقق من فهمك :

١/ لو ١٠٠٠٠   ٢/ لو ٠,٠٠٠١

يتكون لوغريثم أي عدد حقيقي موجب من جزأين:

١. عدد صحيح ويسمى العدد البياني.
٢. كسر عشري ويسمى بالجزء العشري.

مفهوم أساسي

العدد البياني:

التعبير اللفظي: العدد البياني في لوغريثم أي عدد أكبر من الواحد الصحيح يكون موجباً ويساوي العدد الدال على عدد أرقام جزئه الصحيح ناقص واحد.

أمثلة:

العدد	العدد البياني
١٠٠٠	٣
٢١٧,٨	٢
١٠٠	٢
٤٢,٣	١
٦,٣١٥	صفر
١	صفر

التعبير اللفظي: العدد البياني في لوغريثم أي عدد أقل من الواحد الصحيح يكون سالباً ويساوي عدد الأصفار يمين الفاصلة العشرية مباشرة مضافاً إليه واحد.

أمثلة:

العدد	العدد البياني
٠,١	١ـــ
٠,٠٢٤٣	٢ـــ
٠,٠٠٢١٨	٣ـــ
٠,٠٠٠٧	٤ـــ
٤,٠٠٠٦	صفر

- ماذا تلاحظ في العدد الصحيح من قوى ١٠ ؟
يكون لوغريثمه صحيحاً (موجباً أو سالباً)

ايجاد لوغريثم الأعداد المحصورة بين قوتين صحيحتين:

- العدد ٣ ينحصر بين ١ و ١٠ أي بين $١٠^{٠}$ و $١٠^{١}$
∴ لو ٣ ينحصر بين ٠ و ١ = ٠ + كسراً عشرياً موجباً
- العدد ٣٧ ينحصر بين $١٠^{١}$ و $١٠^{٢}$
∴ لو ٣٧ ينحصر بين ١ و ٢ = ١ + كسراً عشرياً موجباً

- العدد ٦١٥,٤ ينحصر بين ١٠٠ و ١٠٠٠ أي بين $١٠^{٢}$ ، $١٠^{٣}$
∴ لو ٦١٥,٤ ينحصر بين ٢ و ٣ = ٢ + كسراً عشرياً موجباً
- العدد ٠,١٦ ينحصر بين $١٠^{-١}$ و $١٠^{٠}$
∴ لو ٠,١٦ ينحصر بين -١ و ٠ = -١ + كسراً عشرياً موجباً

للبحث عن الجزء العشري في اللوغريثمات المعتادة صممت جداول اللوغريثمات لاستخراج الجزء العشري من أربعة منازل عشرية وأيضاً يمكن استخراج العدد باستخدام الآلة الحاسبة والتي تعطي الجزء العشري والعدد البياني مباشرة.

مثـــال (١):

حدد العدد البياني للوغريثمات الأعداد التالية:

٢٣,٤٢٥ ، ٣,٢١٦ ، ٠,٧٤٢١ ، ٠,٠٤٢٦ ، ٣,٠٠١

الحل:

العدد	٢٣,٤٢٥	٣,٢١٦	٠,٧٤٢١	٠,٠٤٢٦	٣,٠٠١
العدد البياني	١	صفر	-١	-٢	صفر

مثـــال (٢):

إذا كان لو ٥,٦٣٦ = ٠,٧٥١ أوجد:

أ/ لو ٥٦٣٦ ب/ لو ٥٦,٣٦ جـ/ لو ٠,٠٥٦٣٦

الحل:

أ) لو ٥٦٣٦ = ٣,٧٥١
ب) لو ٥٦,٣٦ = ١,٧٥١
ج) لو ٠,٠٥٦٣٦ = $\bar{٢}$,٧٥١

تمرين (١٠)

١) إذا كان لو ٦,٣٧ = ٠,٨٠٤١ أوجد:
أ/ لو ٦٣,٧ ب/ لو ٦٣٧٠ جـ/ لو ٠,٠٦٣٧٠ د/ لو ٠,٠٠٦٣٧٠
٢) اكمل: إذا كان لو ٧,١٢ = ٠,٨٥٢٥ فإن:
أ/ لو ... = ٢,٥٨٢٥ ب/ لو ... = $\bar{١}$,٨٥٢٥ جـ/ لو ٠,٠٠٧١٢ = ...

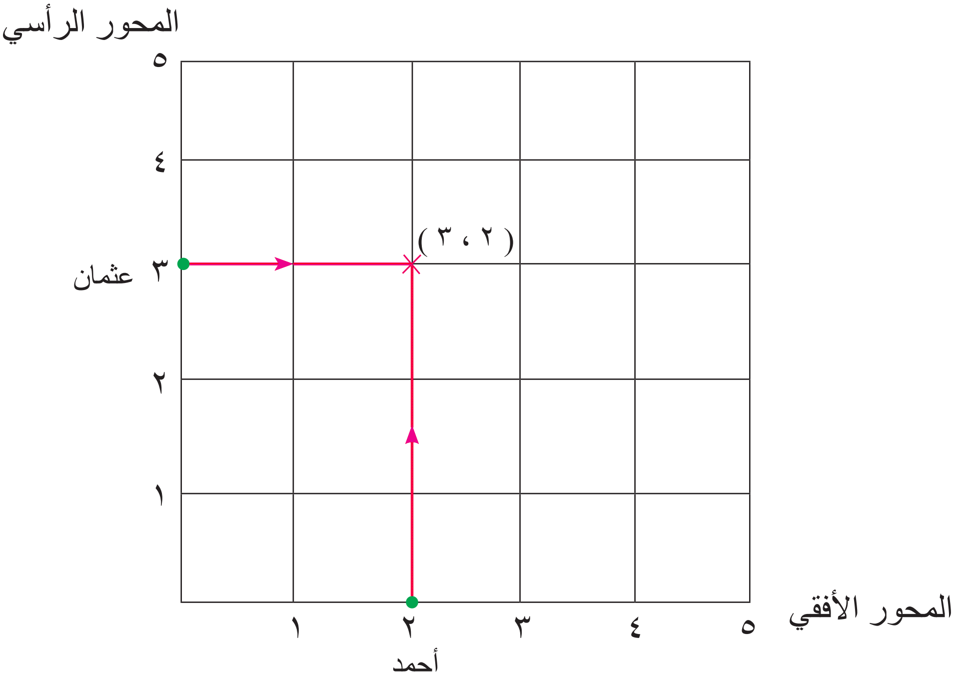
الوحدة الثالثة

المستوى الديكارتي والمعادلات الآنية

(٣-١) تعيين موضع النقط في المستوى الديكارتي

تمهيد:

إذا كان أحمد يقف في النقطة ٢ على المستوى الأفقي، وتحرك مسافة قدرها ثلاث وحدات في الاتجاه الرأسي إلى أعلى في خط مستقيم عمودي على المحور الأفقي وموازياً للمحور الرأسي ثم توقف كما في الشكل (١) وكان عثمان يقف في النقطة ٣ على المحور الرأسي وتحرك مسافة قدرها وحدتين أفقياً إلى اليمين في خط مستقيم عمودي على المحور الرأسي وموازياً للمحور الأفقي ثم توقف، والتقى أحمد وعثمان عند تقاطع الخط الرأسي مع الخط الأفقي في النقطة (٢ ، ٣) كما في الشكل (١)



الشكل (١)

- نلاحظ أن الزوج المرتب (٢ ، ٣) يناظر نقطة تقاطع الخط الرأسي الثاني مع الخط الأفقي الثالث.

- حيث ٢ هي النقطة التي تقع على المحور الأفقي، ٣ هي النقطة التي تقع على المحور الرأسي، (٢ ، ٣) نقطة التقاطع.

درست سابقاً حاصل الضرب الديكارتي مثلاً سَ × سَ

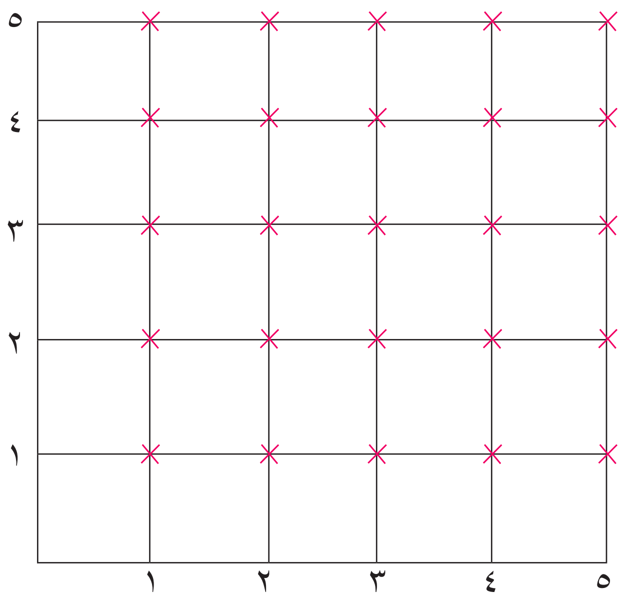
نشاط:

إذا كانت سَ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } اكمل كتابة الأزواج المرتبة لحاصل الضرب الديكارتي سَ × سَ في الجدول أدناه الشكل (٢)

٥	(١ ، ٥)	(٢ ،)	(٣ ،)	(٤ ،)	(،)
٤	(، ٤)	(، ٤)	(، ٤)	(، ٤)	(، ٤)
٣	(١ ،)	(٢ ، ٣)	(٣ ،)	(٤ ،)	(٥ ،)
٢	(١ ، ٢)	(٢ ،)	(٣ ، ٢)	(٤ ، ٢)	(٥ ، ٢)
١	(١ ، ١)	(٢ ، ١)	(٣ ، ١)	(٤ ، ١)	(٥ ،)
	١	٢	٣	٤	٥

الشكل (٢)

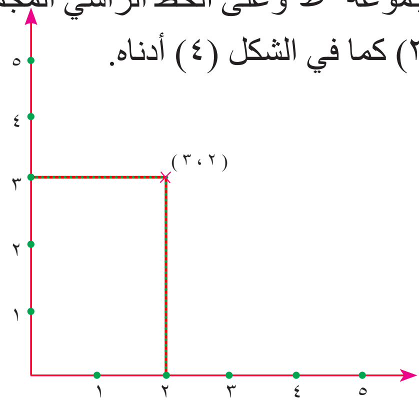
الشكل (٣) يوضّح تمثيلاً بيانياً شبكياً للحاصل الديكارتي سَ × سَ بدون كتابة الأزواج المرتبة حيث سَ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }



الشكل (٣)

نلاحظ في الشكل (٣) أنه تمثيل بيـــــــــاني شبكي لحاصل الضرب الديكـــــارتي س × س تتقاطع فيه الخطوط الرأسية مع الخطوط الأفقية في مجموعة من النقط.

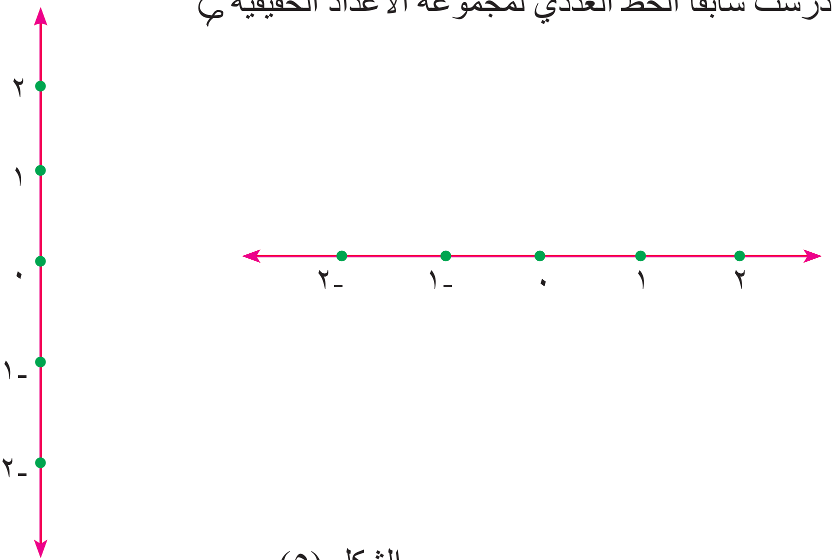
مما سبق وبهذا المفهوم فإنه يمكن احداث شبكة تُمثّل نقط تقاطع الخطوط الرأسية مع الخطوط الأفقية مجموعة الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى ط × ط إذا مثلنا على الخط الأفقي المجموعة ط وعلى الخط الرأسي المجموعة ط نفسها، فمثلاً يُمثّل الزوج المرتب (٢ ، ٣) كما في الشكل (٤) أدناه.



الشكل (٤)

من النشاط السابق في الشكل (٢) نقول: إذا كانت سَ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } فإن حاصل الضرب الديكارتي سَ × سَ يعني مجموعة جميع الأزواج المرتبة (س ، ص) حيث س ∈ سَ ، ص ∈ سَ .

درست سابقاً الخط العددي لمجموعة الأعداد الحقيقية ح



الشكل (٥)

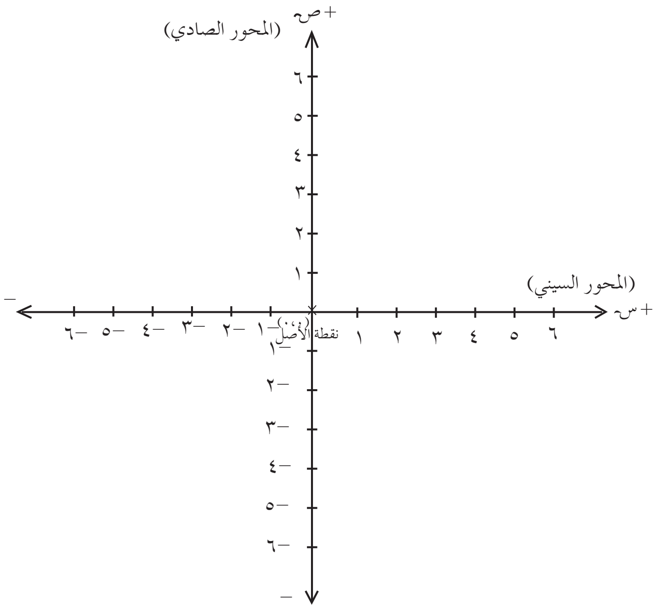
فإذا تصورنا شبكة مناظرة للمجموعة ح × ح حيث ح هي مجموعة الأعداد الحقيقية، فإنه يمكن الحصول على نقطة لكل زوج مرتب مثل (س ، ص) ∈ ح × ح

ونسمي مجموعة النقط هذه بالمستوى الديكارتي.

ويمكن تمثيل ذلك بيانياً بخطين متعامدين متقاطعين في نقطة ولتكن (و) وتسمى نقطة الأصل (الشكل (٦)) ويناظرها الزوج المرتب (٠ ، ٠)

وكما سبق في خط الأعداد الحقيقية فإن العدد والنقطة المناظرة له هما اسمان لشيء واحد، أي أن النقطة في المستوى الديكارتي والزوج المناظر لهما وليكن (س ، ص) هما اسمان لشيء واحد، وفي هذه الحالة فإن س تسمى الاحداثي السيني، ونسمي ص الاحداثي الصادي كما في الشكل (٦)

- اكتب احداثيات نقطة الأصل (و)



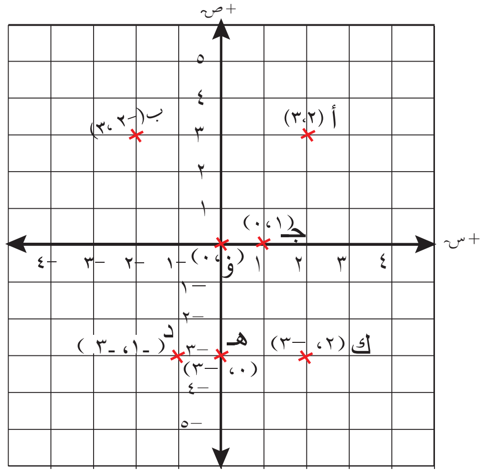
الشكل (٦)

مثال (١):

عيّن النقط الآتية في المستوى الديكارتي:

أ (٢ ، ٣)، ب (-٢ ، ٣)، جـ (١ ، ٠)، د (-١ ، -٣)، هـ (٠ ، -٣) ، و (٠ ، ٠) ، ك (٢ ، -٣)

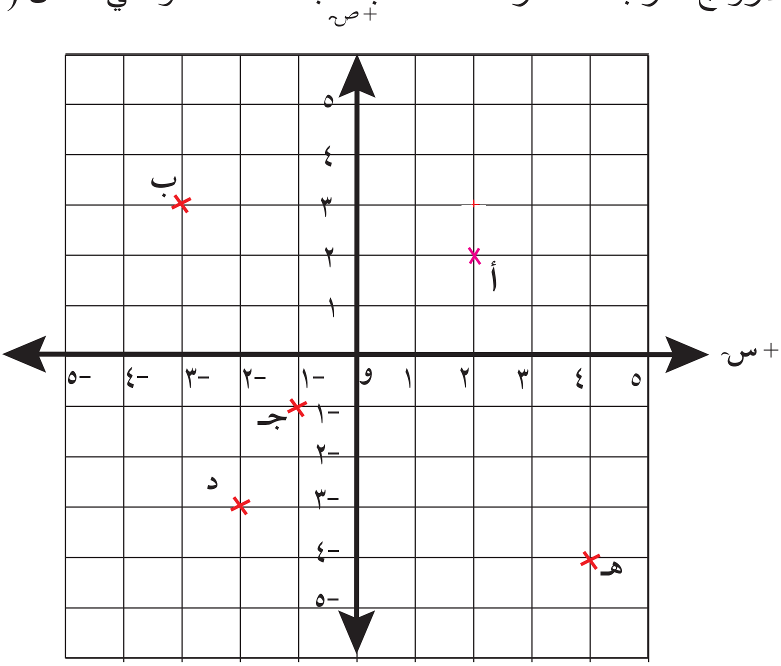
الحل :



الشكل (٧)

مثال (٢):

اكتب الأزواج المرتبة المناظرة للنقط أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و في الشكل (٨) أدناه:



الشكل (٨)

الحل:

من الشكل (٨):

أ (٢ ، ٢) ، ب (-٣ ، ٣) ، جـ (-١ ، -١) ، د (-٢ ، -٣) ، هـ (٤ ، -٤) ، و (٠ ، ٠)

ملاحظات:

١) يسمى الخط الأفقي بالمحور السيني، ويسمى الخط الرأسي بالمحور الصادي.

٢) على المحور السيني، الأعداد الموجبة تُمثّل على النقط يمين نقطة الأصل و (٠ ، ٠) وتُمثّل الأعداد السالبة على النقط يسار نقطة الأصل و (٠ ، ٠)

٣) على المحور الصادي، الأعداد الموجبة تُمثّل على النقط أعلى نقطة الأصل(و) ، وتُمثّل الأعداد السالبة أسفل نقطة الأصل(و).

٤) أيّ نقطة على المحور السيني تمثل بزوج مرتب من النوع (س ، ٠)، وأيّ نقطة على المحور الصادي تمثل بزوج مرتب من النوع (٠ ، ص)

٥) لأي نقطة ف احداثياتها (س ، ص)، |س| يساوي بعد النقطة ف عن المحور الصادي، و |ص| يساوي بعد النقطة ف عن المحور السيني.

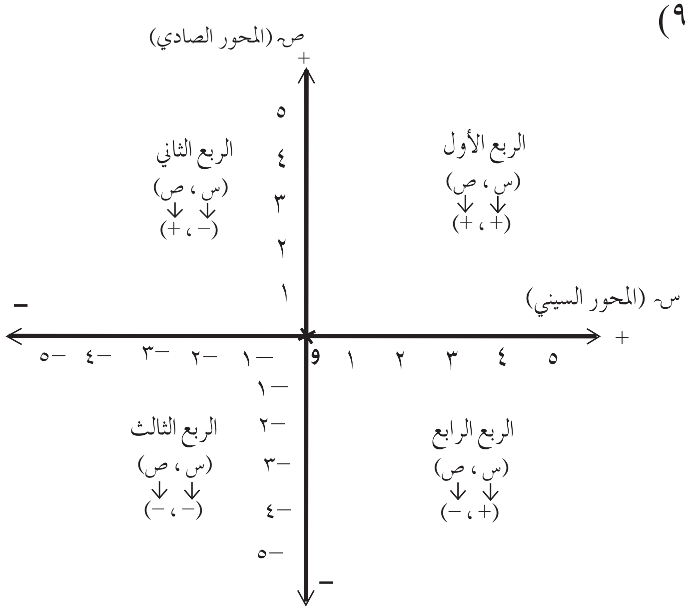
٦) أيّ نقطة تقع في الربع الأول يكون س > ٠ ، ص > ٠

أيّ نقطة تقع في الربع الثاني يكـــون س < ٠ ، ص > ٠

أيّ نقطة تقع في الربع الثالث يكون س < ٠ ، ص < ٠ ،

أيّ نقطة تقع في الربع الرابع يكـــون س > ٠ ، ص < ٠

انظر الشكل (٩)



الشكل (٩)

مثال (٣):

بدون الرسم اذكر الربع أو المحور الذي تقع فيه كل نقطة من النقط الآتية في المستوى الديكارتي.

أ (٣ ، ٥) ، ب (-٣ ، -٢) ، جـ (٠ ، $\frac{-٣}{٢}$) ، د (٤ ، ٠) ، هـ (١,٧ ، -٦) ، م (-١ ، ٣)

الحل:

- النقطة أ تقع في الربع الأول لأن كلاً من الاحداثيين موجب.
- النقطة ب تقع في الربع الثالث لأن كلاً من الاحداثيين سالب.
- النقطة جـ تقع على المحور الصادي لأن الاحداثي السيني يساوي الصفر.
- النقطة د تقع على المحور السيني لأن الاحداثي الصادي يساوي الصفر.
- النقطة هـ تقع في الربع الرابع لأن الاحداثي السيني موجب، والاحداثي الصادي سالب
- النقطة م تقع في الربع الثاني لأن الاحداثي السيني سالب، والاحداثي الصادي موجب.

تمرين (١)

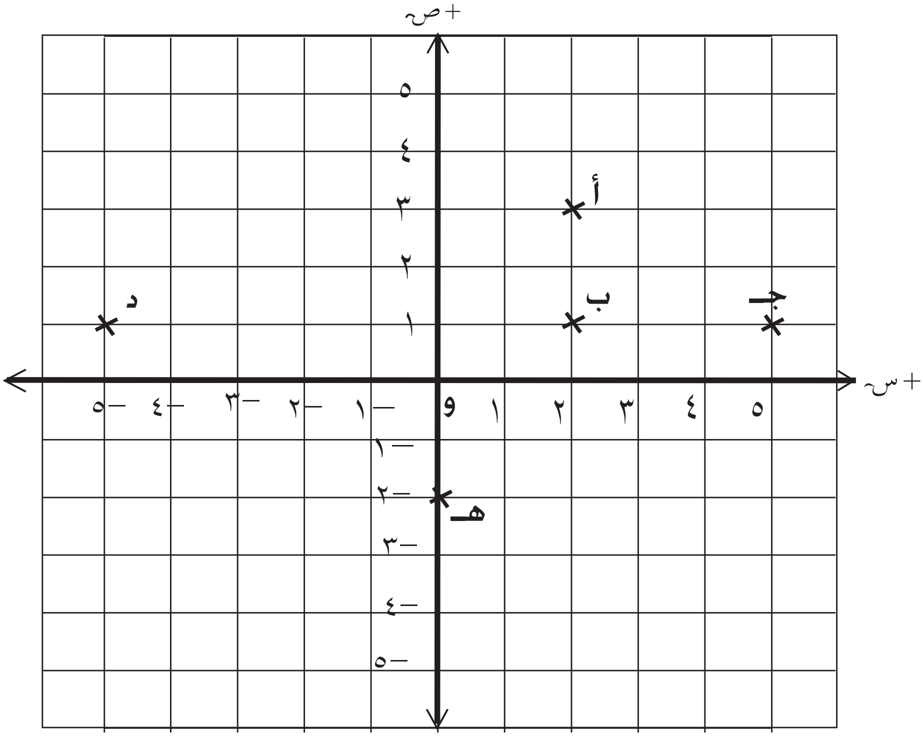
١) انشئ مستوى ديكارتي في كراستك وعيّن عليه النقط:

أ (١ ، ٤) ، ب (-١ ، ٣) ، جـ (-٢ ، -٥) ، د (٣,٥ ، -١,٥) ، هـ (٠ ، -٢) ، م (٣ ، ٠)

٢) اذكر دون تمثيل بياني موقع كلٍ من النقط التالية:

أ (٦ ، ٦) ، ب (٧ ، -٢) ، جـ (٤,٥ ، ٠) ، د (٠ ، ١) ، هـ (-٥ ، -٥) ، و (٠ ، ٠) ، م (-٩ ، -٠,٥)

٣) اكتب احداثيات النقط أ ، ب ، جـ ، د ، هـ المبيّنة على الشكل (١٠):



الشكل (١٠)

تحقق من فهمك :

في المسألة (٣) في الشكل (١٠)

- صل النقط أ ، ب ، جـ لتحصل على المثلث أ ب جـ
- بدون استخدام أدوات هندسية جد قيمة الزاوية ب في المثلث أ ب جـ ، ما نوع هذا المثلث بحسب قيمة الزاوية ب ؟

(٣-٢) معادلة الدرجة الأولى في مجهولين والخط المستقيم

تدريب:

عيّن نقطتين من نقط المستوى الديكارتي تنتميان لمجموعة النقط ف (س ، ص) : ص = س + ٢ ، س ∈ ح

خذ مثلاً س = ٢ ، يكون ص = ٢ + ٢ = ٤ أي النقطة (٢ ، ٤) تحقق المعادلة ص = س + ٢ .

وخذ مثلاً س = ـ١ ، يكون ص = ـ١ + ٢ = ١ أي النقطة (ـ١ ، ١) أيضاً تحقق المعادلة ص = س + ٢ .

صل بين النقطتين (٢ ، ٤) ، (-١ ، ١) بقطعة مستقيمة ومدها من جهتيها، وعيّن ثلاث نقط تقع على المستقيم الناتج، وعيّن ثلاث نقط أخرى لا تقع عليه و دوّن نتائجك في الجدول أدناه:

نقط تقع على المستقيم الذي معادلته ص =س+٢					نقط لا تقع على المستقيم الذي معادلته ص = س+٢			
ف(س،ص)	س	س+٢	ص	معادلة المستقيم ص=س+٢	فَ(سَ، صَ)	س	ص	معادلة المستقيم ص= س+٢
أ(١،٣)	١	١+٢	٣	٣ = ١+٢	ك (١ ، ٤)	١	٤	٤ ≠ ١+٢
ب (٣،)		...+٢	...	...=...+...	ل (،)			
جـ (،)					م (،)			

في الجدول أعلاه نلاحظ أن النقطة (١ ، ٣) تقع على المستقيم الذي معادلته ص = س+٢ ، لذلك فإذا عوّضنا عن س = ١ ، ص = ٣ في المعادلة ص = س+٢ فإنها تحقق هذه المعادلة وكذلك بقية النقط التي تقع على المستقيم نفسه فإنها كلها تحقق المعادلة ص = س+٢

كما نلاحظ أيضاً في الجدول أعلاه أن النقطة (١ ، ٤) لا تقع على الخط المستقيم لذلك فإنها لا تحقق معادلته ص = س+٢ ، ٤ $\neq$ ١ + ٢ وكذلك جميع النقط التي لا تقع على هذا المستقيم فإنها لا تحقق معادلته ص = س+٢

مما سبق نستخلص الملاحظات الآتية:

١) لأيّ نقطة (س ، ص) تقع على المستقيم يكون ص = س+٢ أي تحقق معادلته.

٢) لأيّ نقطة (سَ ، صَ) لا تقع على المستقيم يكون صَ $\neq$ سَ + ٢ أي لا تحقق معادلته.

٣) وإذا اخترت أي نقاط أخرى تقع على المستقيم نجد أن احداثيات تلك النقاط تحقق المعادلة (العلاقة) ص = س+٢ ، وأي نقاط لا تقع على المستقيم لا تحقق هذه المعادلة.

٤) وبالمثل إذا اخذنا أي علاقة (معادلة) أخرى مثل ص = ٢س أو ٣ص = س+١ ، أو ص = ٣س، ... إلخ ورسمنا هذه المعادلات (العلاقات) على المستوى الديكارتي بالطريقة السابقة نجد أن الشكل البياني لكل منها هو خط مستقيم، واحداثي أي نقطة على أي من هذه المستقيمات تحقق المعادلة (العلاقة) بين س ، ص الواردة في كل حالة (معادلة)، كما نجد أن أي نقطة لا تقع على المستقيم لا تحقق تلك العلاقة (المعادلة)

ويمكن كتابة أي من هذه العلاقات (المعادلات) في الصورة أ س + ب ص + جـ = ٠ وتسمى هذه الصورة بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم ، حيث أ يسمى معامل س، ب يسمى معامل ص ، جـ يسمى الحد المطلق ، (حيث أ ، ب لا يساويان الصفر معاً)

مثلاً في المعادلة ٣س – ٢ص – ٥ = ٠

أ = ٣ ، ب = –٢ ، جـ = – ٥

الشكل البياني لأي معادلة من هذا النوع هو خط مستقيم لذلك فالمعادلة التي في هذه الصورة أ س + ب ص + جـ = تعرف بالمعادلة الخطية.

ويمكن الحصول على الشكل البياني المناظر لأي معادلة من هذا النوع بإيجاد

نقطتين تنتميان لمجموعة نقط المستوى التي تحقق احداثيات العلاقة بين المجهولين س ، ص لتلك المعادلة.

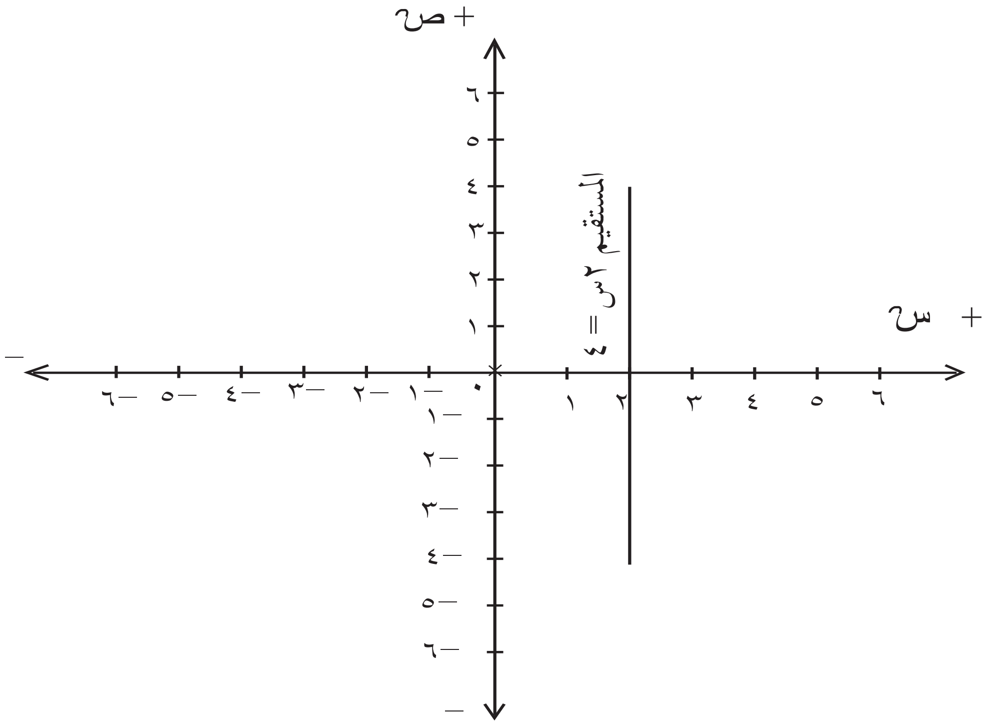
ولكننا نأخذ نقطة ثالثة تحقق المعادلة للتأكد من دقة الرسم والذي يكون دائماً خطاً مستقيماً.

هنالك حالات خاصة لهذه المعادلات منها:

- المعادلة أ س = جـ (أ ≠ ٠) بيانها مستقيم يوازي المحور الصادي

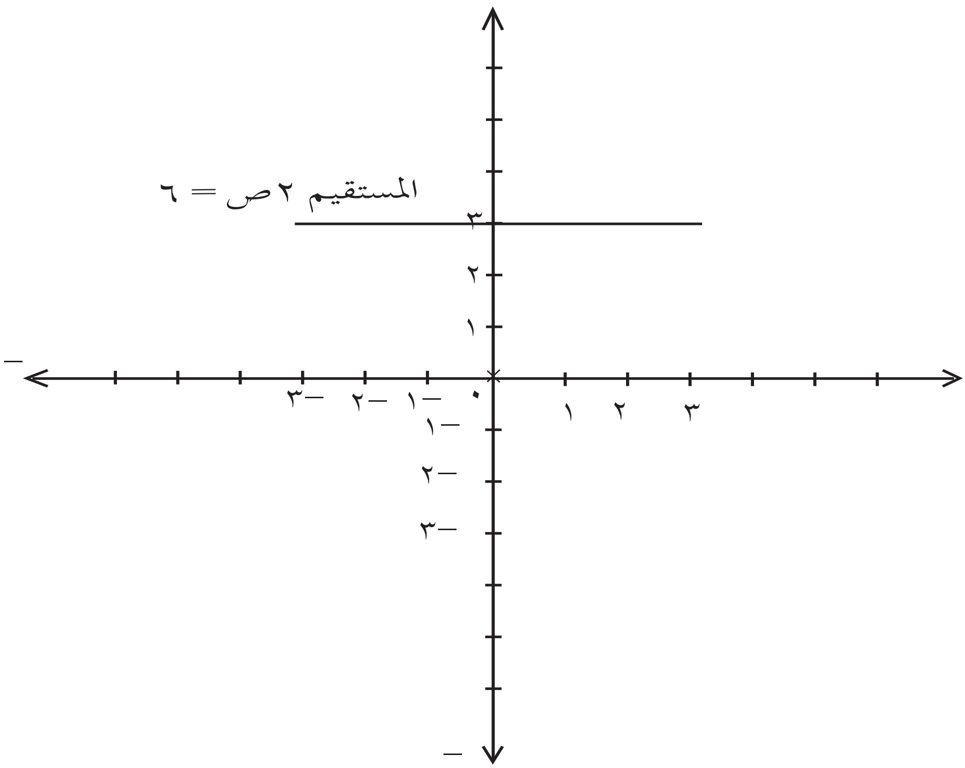
نلاحظ هنا لا يوجد في المعادلة الحد ب ص لأن ب في هذه الحالة تساوي صفر

مثلاً المعادلة ٢س = ٤ ∴ س = ٢ يمثلها المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٠) ويكون هذا المستقيم موازياً للمحور الصادي.



• المعادلة ب ص = جـ (ب ≠ ٠) بيانها مستقيم يوازي المحور السيني

نلاحظ أنه لا يوجد الحد أ س في هذه المعادلة لأن أ في هذه الحالة تساوي صفر



مثلاً : المعادلة ٢ص = ٦ ، ص = ٣ يمثلها المستقيم الذي يمر بالنقطة (٠ ، ٣) ويكون المستقيم موازياً للمحور السيني.

• إذا كانت هنالك معادلة خط مستقيم في الصورة أ س + ب ص = ٠ فهذا يعني أن جـ = ٠

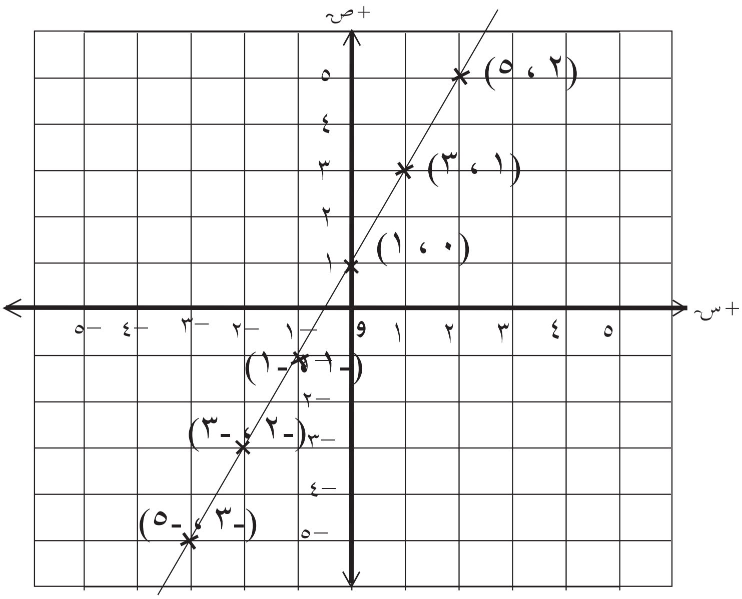
مثال (١):

خذ المعادلة ص = ٢س + ١ ، (س ∈ ح) اكمل الجدول التالي، ثم عيّن النقط التي حصلت عليها في المستوى الديكارتي، ثم صل بينها بقطعة مستقيمة ، ماذا تلاحظ ؟

س	٢س + ١	ص	(س ، ص)
ـ٣			
ـ٢			
ـ١			
٠			
١			
٢			

الحل:

س	٢س + ١	ص	(س ، ص)
ـ٣	(٢×ـ٣) + ١ = ـ٦ + ١	ـ٥	(ـ٣ ، ـ٥)
ـ٢	(٢×ـ٢) + ١ = ـ٤ + ١	ـ٣	(ـ٢ ، ـ٣)
ـ١	(٢×ـ١) + ١ = ـ٢ + ١	ـ١	(ـ١ ، ـ١)
٠	(٢×٠) + ١ = ٠ + ١	١	(٠ ، ١)
١	(٢×١) + ١ = ٢ + ١	٣	(١ ، ٣)
٢	(٢×٢) + ١ = ٤ + ١	٥	(٢ ، ٥)



الشكل (١)

تلاحظ أن أي نقطة حصلت عليها في الجدول تقع على استقامة واحدة مع بقية النقط، أي أن الشكل البياني لمجموعة النقط التي تحقق المعادلة ص = ٢س + ١ هو خط مستقيم وهي معادلة من الدرجة الأولى في مجهولين س ، ص

مثال (٢):

ارسم الخط البياني للمعادلة ٢س + ص = ٤ على المستوى الديكارتي.

الحل:

كما علمنا أنه يمكن تحديد أي ثلاث نقط بحيث تحقق العلاقة الواردة في المعادلة، وذلك باختيار قيم مناسبة للمتغير س وتعويضها في المعادلة لايجاد قيمة ص المناظرة لها.

في المعادلة ٢س + ص = ٤ نجعل ص موضوعاً للقانون

ص = ٤ – ٢س نعوّض س = ١

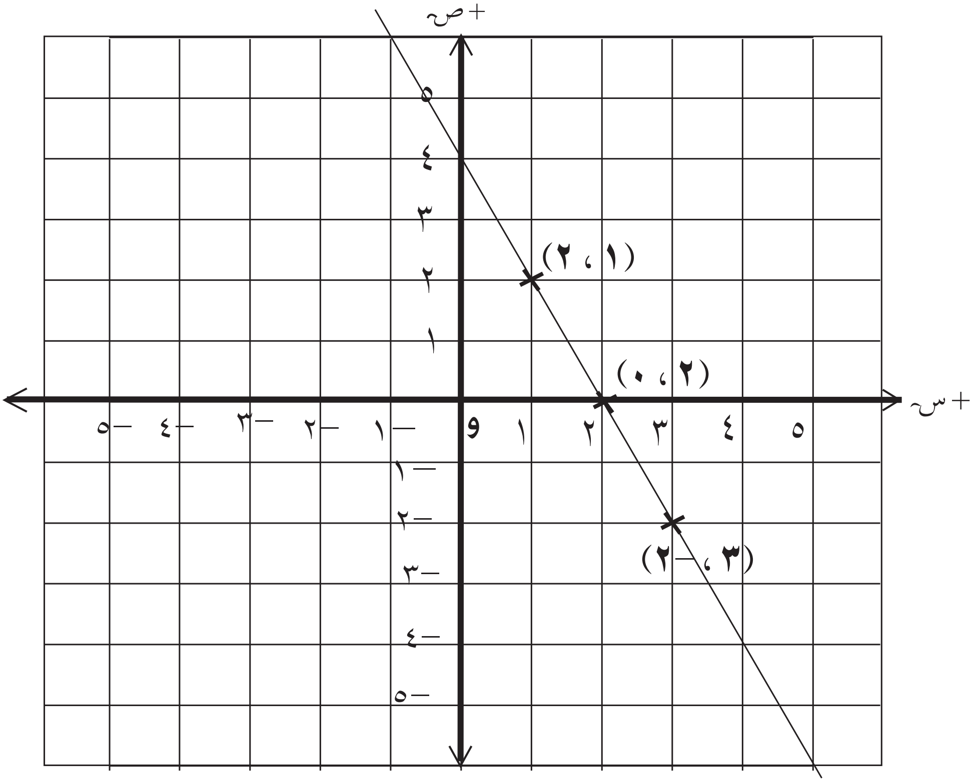
تكون ص = ٤ – (٢ × ١) = ٤ ـ ٢ = ٢

∴ النقطة (١ ، ٢) احدى النقط التي يمر بها الخط البياني ،
وبوضع س = ٢ تكون ص = ٤ – (٢ × ٢) = ٤ – ٤ = ٠

∴ النقطة (٢ ، ٠) تقع على الخط البياني للمعادلة أيضاً
وبوضع س = ٣ تكون ص = ٤ – (٢ × ٣) = ٤ – ٦ = –٢

∴ النقطة (٣ ، ـ٢) تقع على الخط البياني، ويمكن استخدام جدول كما مبيّن في أدناه ثم نرسم النقط (١ ، ٢) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ـ٢) ونصل بينها بالمسطرة لنحصل على الخط البياني للمعادلة كما في الشكل (٢)

س	١	٢	٣
ص	٢	٠	ـ٢



الشكل (٢)

تحقق من فهمك:

من المثال السابق (مثال ٢) الشكل (٢):

حدّد ما إذا كانت النقط التالية تقع على المستقيم الذي معادلته ص = ٤ ـ ٢س ثم تحقق من إجابتك بتعويض قيم س ، ص لكل نقطة في المعادلة ص = ٤ ـ ٢س

النقط هي: أ (ـ٢ ، ٨) ، ب (١ ، ٤) ، جـ (٠ ، ٤)

تمرين (٢)

مثّل بيانياً كلاً من المعادلات الخطية الآتية:

١/ ص = ٢س

٢/ ص + ٤س = ٠

٣/ ٢س – ص = ١

٤/ ٢س + ٣ص = ٥

٥/ ٥س – ٢ص = ٢

(٣-٣) حل المعادلات الآنية من الدرجة الأولى في مجهولين بيانياً

علمنا سابقاً أن الشكل البياني الذي يمثل المعادلة على الصورة:

أ س + ب ص = جـ هو خط مستقيم

إذا كان لدينا معادلتان من الدرجة الأولى في مجهولين، فإن كل معادلة تمثّل بخط مستقيم على المستوى الديكارتي، لنأخذ مثلاً المعادلتين التاليتين:

ص + س = ٥ (١)

٢ص – س = ١ (٢)

أولاً: لنبدأ بالمعادلة الأولى ص + س = ٥ ونجعل ص موضوعاً للقانون فتكون المعادلة كالآتي ص = ٥ – س ثم نضع قيماً مناسبة للمتغير س لايجاد القيم المناظرة لها في المتغير ص كما في الجدول أدناه:

س	١	٢	٤
ص	٤	٣	١

∴ النقط (١ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ١) تحقق المعادلة ص = ٥ – س

فإذا وصلنا بين هذه النقط الثلاث بالمسطرة مع مدها من جهتيها فإننا نحصل على المستقيم الذي معادلته ص = ٥ – س كما في الشكل (١)

ثانياً: نأخذ المعادلة ٢ص – س = ١ ونجعل ص موضوعاً للقانون:

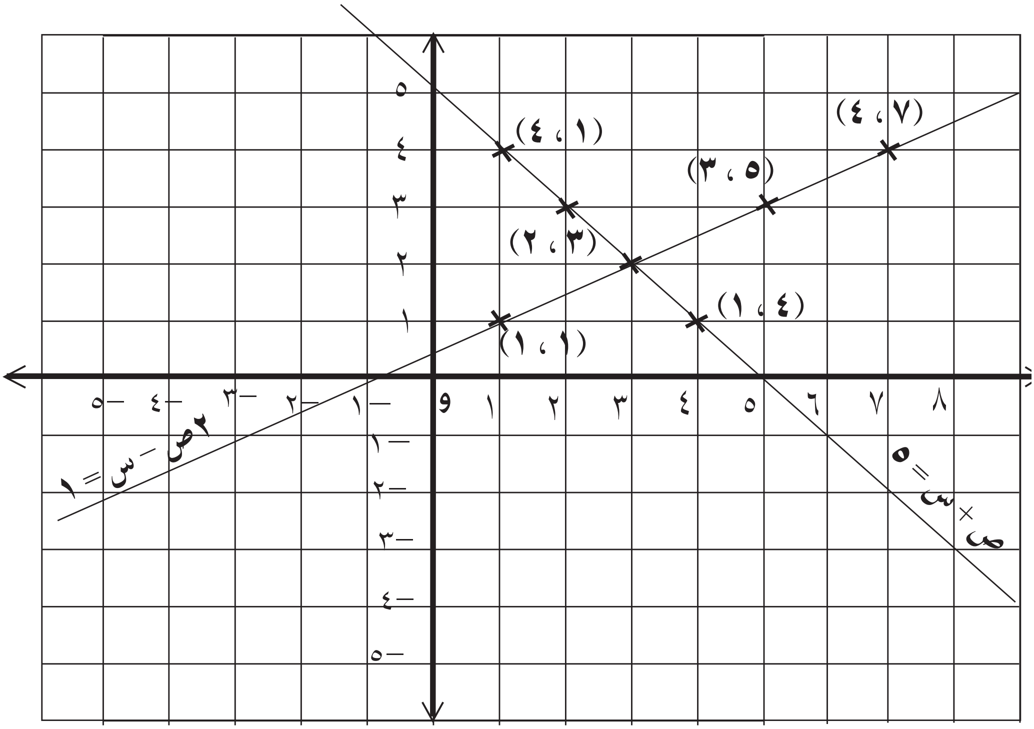
ص = $\frac{(١ + س)}{٢}$ نضع قيماً مناسبة للمتغير س لايجاد القيم المناظرة لها في المتغير ص كما في الجدول أدناه:

س	١	٥	٧
ص	١	٣	٤

∴ النقط (١ ، ١) ، (٥ ، ٣) ، (٧ ، ٤) تقع على المستقيم الذي معادلته:

٢ص – س = ١

نصل بين النقط الثلاث لنحصل على المستقيم كما في الشكل (١)



الشكل (١)

من الرسم البياني في الشكل (١) نلاحظ أن المستقيمين يتقاطعان عند النقطة (٣، ٢) أي أن هذه النقطة تحقق العلاقة الواردة في المعادلة الأولى وأيضاً تحقق العلاقة الواردة في المعادلة الثانية. وهي نقطة واحدة والتي نقول عنها أنها حققت كلاً من المعادلتين في آن واحد وبالتالي تكون (٣ ، ٢) هي الحل المشترك للمعادلتين معاً وأن مجموعة الحل للمعادلتين = { (٣ ، ٢) }

المعادلتان اللتان من هذا النوع تسمى معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى في مجهولين.

بجانب هذه الطريقة البيانية لحل المعادلتين الآنيتين توجد طريقة جبرية للحل سوف نتناولها في الدرس القادم.

الأمثلة التالية توضح الحل البياني للمعادلة الآنية:

مثال (١):

مثّل بيانياً المستقيمين للمعادلتين:

ص – س = ٢ (١) (س ، ص ∈ ح)

ص + س = ٨ (٢)

ومن الرسم جد مجموعة حل المعادلتين.

الحل:

في المعادلة الأولى ص – س = ٢ نجعل ص موضوعاً للقانون بدلالة س فتكون ص = ٢ + س ، في المعادلة الثانية ص + س = ٨ ، ∴ ص = ٨ – س ومن ثم يمكن تكوين الجدولين الآتيين:

المعادلة الأولى ص = ٢ + س

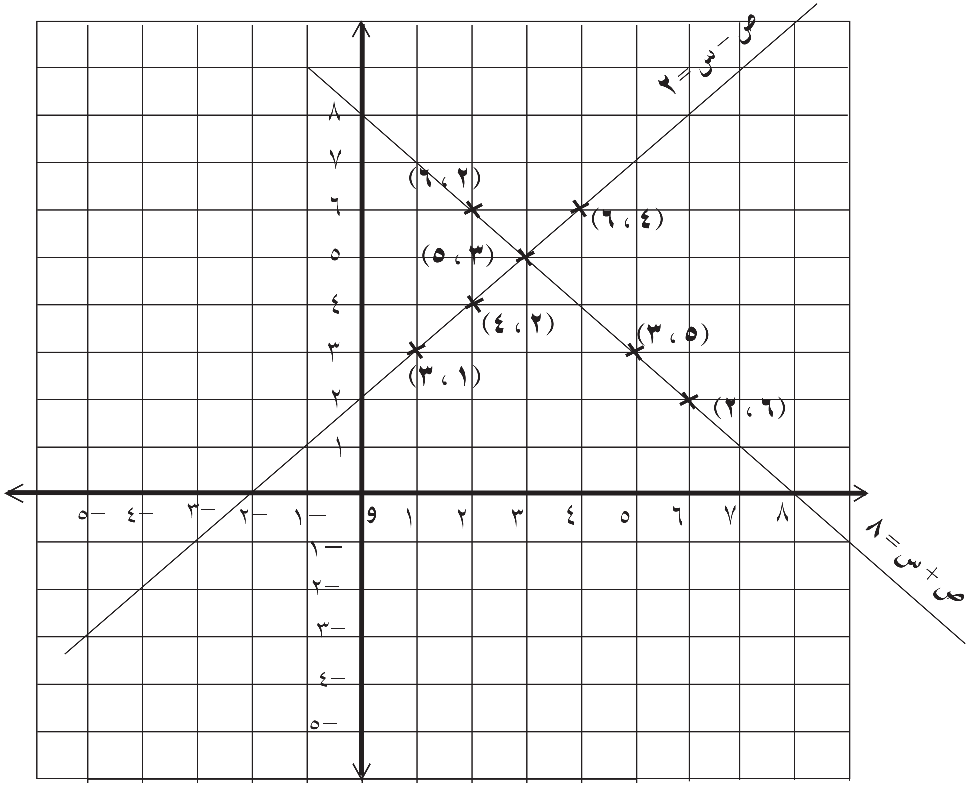
س	١	٢	٤
ص	٣	٤	٦

نصل بين النقط (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٦) لنحصل على المستقيم.

المعادلة الثانية ص = ٨ – س

س	٢	٥	٦
ص	٦	٣	٢

نصل بين النقط (٢ ، ٦) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٢) لنحصل على المستقيم.



الشكل (٢)

من رسم الشكل البياني للمعادلتين الشكل (٢) ينتج مستقيمان يتقاطعان في نقطة واحدة هي (٣ ، ٥) معنى هذا أن حل المعادلتين هو س = ٣ ، ص = ٥

∴ مجموعة الحل للمعادلتين = { (٣ ، ٥) }

مثال (٢):

مثّل بيانياً المستقيمين للمعادلتين:

س + ٢ص = ٠ (١) (س ، ص ∈ ح)

س − ٢ص + ٤ = ٠ (٢)

ومن الرسم جد مجموعة حل المعادلتين.

الحل:

$\because$ س + ٢ص = ٠ $\therefore$ ص = $\frac{-س}{٢}$ (١)

$\because$ س − ٢ص + ٤ = ٠ $\therefore$ ص = $\frac{س + ٤}{٢}$ (٢)

ومن ثم يمكن تكوين الجدولين الآتيين:

المعادلة الأولى: ص = $\frac{-س}{٢}$

س	−٢	٠	٢
ص	١	٠	−١

$\therefore$ النقط (-٢ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (٢ ، -١) تقع على مستقيم المعادلة الأولى

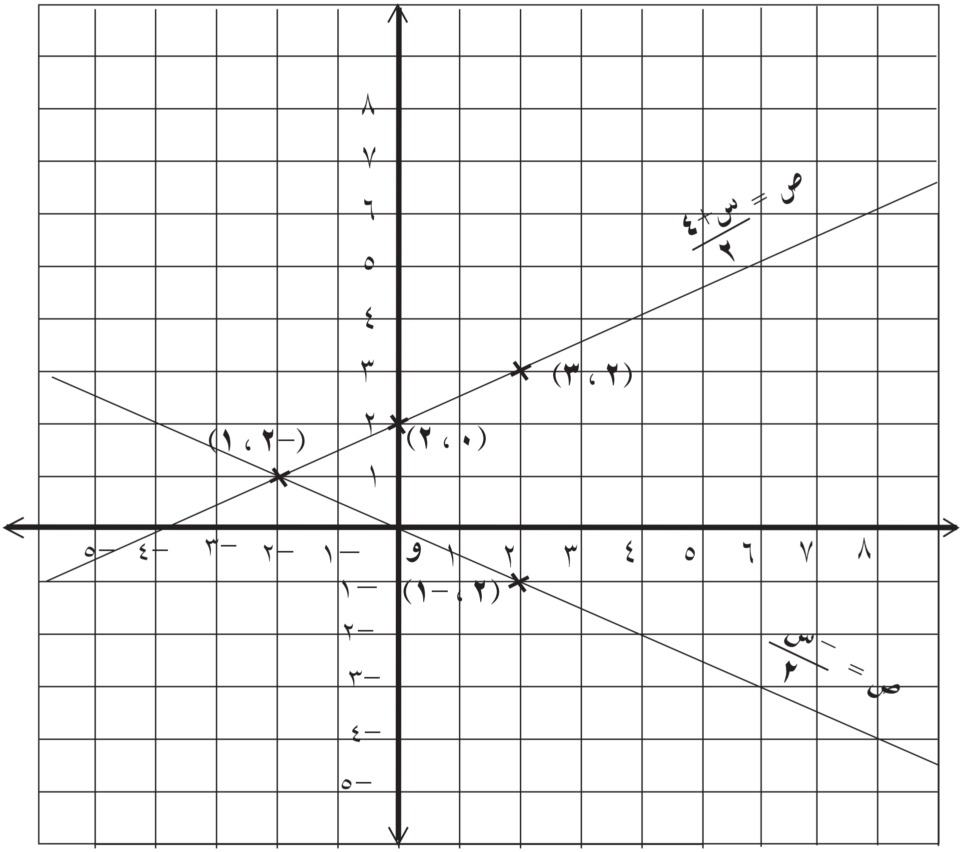
نصل هذه النقط الثلاث للحصول على المستقيم كما في الشكل (٣)

المعادلة الثانية: ص = $\frac{(س + ٤)}{٢}$

س	-٢	٠	٢
ص	١	٢	٣

$\therefore$ النقط (-٢ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٣) تقع على مستقيم المعادلة الثانية

نصل هذه النقط الثلاث للحصول على المستقيم كما في الشكل (٣)



الشكل (٣)

من رسم الشكل البياني للمعادلتين الشكل (٣) ينتج مستقيمان يتقاطعان في نقطة واحدة هي (-٢ ، ١) معنى ذلك أن حل المعادلتين هو س = -٢ ، ص = ١

∴ مجموعة حل المعادلتين = { (-٢ ، ١) }

مثـــــال (٣):

حل المعادلتين الآتيتين بيانياً:

ص - س + ٣ = ٠ (١) (س ، ص ∋ ح)

ص + س - ١ = ٠ (٢)

الحل:

المعادلة الأولى: ∵ ص – س + ٣ = ٠ ∴ ص = س – ٣ (١)

المعادلة الثانية: ∵ ص + س – ١ = ٠ ∴ ص = ١ – س (٢)

نكوّن الجدولين الآتيين:

المعادلة الأولى: ص = س – ٣

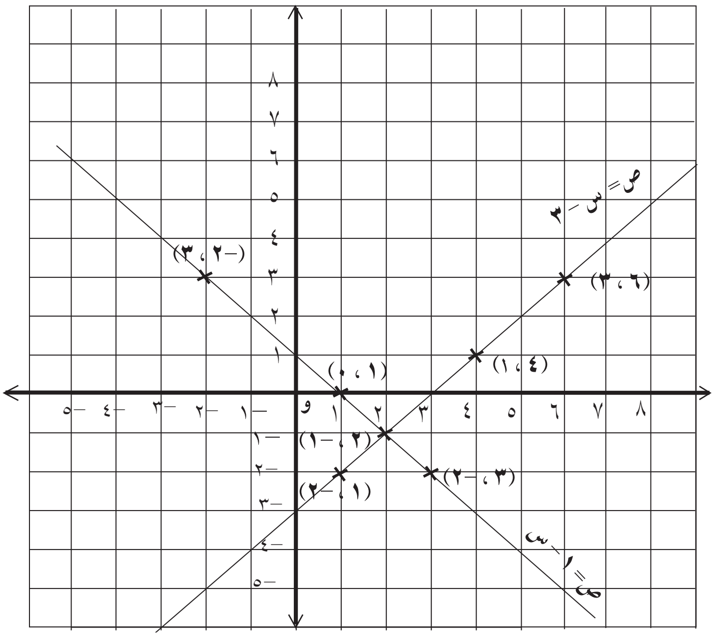
س	٦	٤	١
ص	٣	١	–٢

نصل بين النقط (٦ ، ٣) ، (٤ ، ١) ، (١ ، –٢) للحصول على المستقيم لأنها تقع عليه.

المعادلة الثانية: ص = ١ – س

س	٣	١	–٢
ص	–٢	٠	٣

نصل بين النقط (٣ ، –٢) ، (١ ، ٠) ، (–٢ ، ٣) للحصول على المستقيم لأنها تقع عليه.



الشكل (٤)

بعد رسم الشكل (٤) نجد أن نقطة تقاطع المستقيمين هي (٢ ، ـ١)

س = ٢ ، ص = ـ١

∴ مجموعة حل المعادلتين = { (٢ ، ـ١) }

تحقق من فهمك:

حل المعادلتين الآتيتين بيانياً:

٢س + ٣ص = ١٢ (١)

٣س ـ ٢ص = ٥ (٢)

خلاصة:

إذا كان لدينا معادلتان من الدرجة الأولى في مجهولين (المتغيرين س ، ص) مثلاً فإن كل معادلة من هاتين المعادلتين تمثل بيانياً بخط مستقيم، فإذا كان هذان المستقيمان يتقاطعان فإن احداثيات نقطة تقاطعهما تمثل مجموعة حل هاتين المعادلتين ويتم ذلك بتتبع الخطوات الآتية:

١ـ في كل معادلة نجعل ص موضوعاً للقانون.

٢ـ في كل معادلة نضع قيماً مناسبة للمتغير س للحصول على قيم المتغير ص المناظرة للمتغير س ويكون ذلك في شكل جدولين (جدول لكل معادلة) لنحصل على ثلاث نقط لكل معادلة على حدة.

٣ـ في كل معادلة نصل بين النقط التي حصلنا عليها لنحصل على المستقيم الذي تقع عليه هذه النقط (ينتج مستقيمان، مستقيم لكل معادلة).

٤ـاحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين هي مجموعة حل هاتين المعادلتين.

ملاحظة : إذا لم يتقاطع المستقيمان فإن مجموعة الحل هي ϕ

تمرين (٣)

جد مجموعة الحل لكل من أزواج المعادلات الآتية بيانياً (س ، ص ∈ ح)

١) س + ص = ٣ ، ٣س − ص = ١

٢) س − ص = ١ ، س + ٢ص = ٧

٣) س − ٢ص = ١ ، ٢س + ص = ٢

٤) ص = ٢س + ٢ ، ٣س + ٢ص = ٤

٥) ٣ص = ٢س + ٨ ، س + ص − ١ = ٠

٦) س + ٣ص = ٠ ، س − ٣ص = ٦

٧) س = ص ، ٣س = ص − ٢

٨) ٤س − ٢ص = ٧ ، س + ٣ص = ٧

٩) س + ص = ٣ ، ٥س − ٥ص = ١

١٠) ٢س − ٢ص = ٥ ، ٢س + ٣ص + ١ = ٠

١١) س = ٢ ، ص = ٣

(٣- ٤) حل المعادلات الآنية من الدرجة الأولى في مجهولين جبرياً:

تمهيد

أمثلة: جد قيمة س ، ص في كلٍ مما يلي:	**تدريب:** مستعيناً بطرق الحل في الأمثلة التي في العمود المجاور، جد قيمة س ، ص في كلٍ مما يلي:
١) ٢س = ٨ ، س = $\frac{٨}{٢}$ ∴ س = ٤	١) ٣س = −٦
٢) ٣س + ١ = ٢س + ٧ ٣س − ٢س = ٧ − ١ ∴ س = ٦	٢) ٢ص + ١ = ص + ٨
٣) $\frac{(\text{س}+٢\text{ص})}{٢}$ = ص − ١ بضرب المعادلتين في ٢ $\frac{٢(\text{س}+٢\text{ص})}{٢}$ = ٢ (ص − ١) س + ٢ص = ٢ص − ٢ س+٢ص − ٢ص = −٢ ∴ س = −٢	٣) $\frac{(٣\text{س} - ٤\text{ص})}{٤}$ = ٣ − ص

٤) ـ٣ص − ٢ص = ـ١٠ ـ٥ص = ـ١٠ (ـ٥ص) / (ـ٥) = (ـ١٠) / (ـ٥) ∴ ص = ٢	٤) ـ س − س = ٦
٥) ٢ص − (ـ٥ص) − ١ = ـ٢٢ ٢ص + ٥ص = ـ٢٢ + ١ ٧ص = ـ٢١ ، ص = (ـ٢١) / ٧ ∴ ص = ـ٣	٥) ٤س − (ـ٢س) − ١ = ١١

طريقة الحذف بالجمع

إذا أخذنا المعادلتين:

س + ص = ٨ (١)

س – ص = ٤ (٢)

واردنا حلهما بيانياً فسنجد أن كلاً من المعادلتين تتحقق بعدد غير منته من القيم، فمثلاً من حلول المعادلة الأولى س + ص = ٨ يوضحها الجدول أدناه:

س	٨	٧	(٦)	٥	٠	ـ٢
ص	٠	١	(٢)	٣	٨	٦

ومن حلول المعادلة الثانية س – ص = ٤ يوضحها الجدول أدناه:

س	٨	٧	(٦)	٥	٠	ـ٢
ص	٤	٣	(٢)	١	ـ٤	ـ٦

نلاحظ أن الحل (٦ ، ٢) هو حل مشترك للمعادلتين وهذا هو الحل لنظام المعادلتين ويحقق شرط المعادلتين في آن واحد لأن ٦ + ٢ = ٨ (المعادلة الأولى) ، ٦ – ٢ = ٤ (المعادلة الثانية)

ولكن كيف نصل جبرياً لهذا الحل (٦ ، ٢)

لنأخذ المعادلتين:

س + ص = ٨ (١)

س – ص = ٤ (٢)

نلاحظ أن جمع المعادلتين يؤدي إلى حذف المجهول ص

س + ص = ٨

س – ص = ٤

٢س = ١٢ ، معادلة مجهول واحد حلها س = ٦

نلاحظ أننا جمعنا المعادلتين مباشرة لأن معاملي المجهولين متناظران متساويان في المقدار ومختلفان في الاشارة (ص ، - ص)]

وبالتعويض عن قيمة س في احدى المعادلتين (المعادلة الأولى مثلاً) نجد:

٦ + ص = ٨

ص = ٨ – ٦

∴ ص = ٢

∴ مجموعة حل المعادلة = { (٦ ، ٢) }

تحقق من أن الزوج المرتب (٦ ، ٢) يحقق كلاً من المعادلتين وبالتالي هو حل لنظام المعادلتين.

لحل نظام من معادلتين بمجهولين، نحذف أحد المجهولين، فنحصل على معادلة بمجهول واحد، حلها يؤدي إلى حل النظام.

هنالك ثلاث طرق رئيسية للحذف سوف نبدأ بالطريقة الأولى:

الطريقة الأولى: طريقة الحذف بالجمع:

طريقة الحذف بالجمع ترتكز على الخطوتين التاليتين:

١) بضرب طرفي المعادلتين بعددين نختارهما بحيث يصبح معاملا أحد المجهولين متناظرين (متساويين في المقدار ومختلفين في الإشارة) إن لم يكونا كذلك أي أننا نوحد معاملي أحد المجهولين مع اختلاف الإشارة.

٢) نجمع المعادلتين الناتجتين بعد ضرب كل معادلة بعدد مناسب لنحصل على معادلة

بمجهول واحد، أو نجعل معاملي أحد المجهولين متساويين في المقدار والإشارة ثم نطرح المعادلتين لنحصل على معادلة في المجهول الآخر.

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

٣س + ٤ص = ٥　　　　(١)

٢س – ٣ص = ٩　　　　(٢)

(س ، ص ∈ ص)

لكي نحذف المجهول س بالجمع، نضرب طرفي المعادلة الأولى بالعدد ٢، ثم نضرب طرفي المعادلة الثانية بالعدد -٣ فنحصل على نظام يتناظر فيه معاملا المجهول س

نضرب المعادلة الأولى × ٢ : ٢ (٣س + ٤ص) = ٥ × ٢ : ٦س + ٨ص = ١٠

نضرب المعادلة الثانية × -٣ : -٣ (٢س – ٣ص) = ٩ × -٣ : –٦س + ٩ص= –٢٧

بجمع المعادلتين　　　　١٧ص = – ١٧

١٧ص = –١٧

∴ ص = –١

نعوض عن ص بقيمة –١ في احدى المعادلتين (المعادلة الأولى مثلاً)

٣س + (٤ × –١) = ٥

٣س –٤ = ٥

٣س = ٥ + ٤

٣س = ٩

∴ س = ٣

$\therefore$ مجموعة الحل = { (٣ ، −١) }

التحقق من صحة الحل:

نعوض س = ٣ ، ص = −١ في كلٍ من المعادلتين

المعادلة الأولى ٣س + ٤ص = ٥

الطرف الأيمن = (٣ × ٣) + (٤ × −١)

= ٩ − ٤ = ٥ = الطرف الأيسر

المعادلة الثانية ٢س − ٣ص = ٩

الطرف الأيمن = (٢ × ٣) − (٣ × −١)

= ٦ + ٣ = ٩ = الطرف الأيسر

مثال (٢):

جد مجموعة حل المعادلتين الآنيتين الآتيتين جبرياً :

٣س − ٣ = ص

٨س − ٤ص − ٤ = ٠

الحل:

$٣س - ص = ٣$ (١)

$٨س - ٤ص = ٤$ (٢)

بضرب المعادلة (١) في ٤ لتوحيد معامل ص :

$٤ (٣س - ص) = ٣ \times ٤$

$١٢س - ٤ص = ١٢$ (٣)

$٨س - ٤ص = ٤$ (٢)   بطرح (٣) - (٢)

$٤س = ١٢ - ٤$

$٤س = ٨$

$\therefore$ س = ٢

نعوض قيمة س في المعادلة (١):

$(٣ \times ٢) - ص = ٣$

$٦ - ص = ٣$

$\therefore$ ص = ٣

$\therefore$ مجموعة الحل = { (٢ ، ٣) }

تمرين (٤)

استخدم طريقة الحذف لايجاد مجموعة الحل لكل من:

١) س + ص = ١ ، ٢س – ص = ٥

٢) س – ص = ٤ ، ٢س + ٣ص = ٣

٣) س – ٢ص – ٥ = ٠ ، ص – ٢س + ٤ = ٠

٤) ٢س – ص = ٧ ، ٢ص + س = ٦

٥) س – ٥ = ٣ص ، ٦س + ٧ = ١٢ص

٦) ص + ٢س = ١١ ، ٥ (س – ٣) = ص + ٤

(٣- ٥) الطريقة الثانية: طريقة الحذف بالمقابلة

يمكن أن نحذف أحد المجهولين في المعادلات الآنية بطريقة أخرى تعرف بطريقة الحذف بالمقابلة، وترتكز هذه الطريقة على الخطوتين التاليتين:

١) حساب قيمتي أحد المجهولين بدلالة المجهول الآخر في كلٍ من المعادلتين.

٢) تساوي قيمتي المجهول يعطي معادلة ذات مجهول واحد.

مثال (١):

جد مجموعة حل المعادلتين الآنيتين مستعملاً الحذف بالمقابلة :

س + ٢ص = ٧

٣س + ٤ص = ١٥

(س ، ص $\in$ ح)

الحل:

نحسب قيمتي س من المعادلتين بدلالة ص

من المعادلة الأولى: $\because$ س + ٢ص = ٧

(نجعل س موضوعاً للقانون) $\therefore$ س = ٧ – ٢ص (١)

من المعادلة الثانية: $\because$ ٣س + ٤ص = ١٥

نجعل س موضوعاً للقانون $\therefore$ س = $\frac{(١٥ - ٤ص)}{٣}$ (٢)

س = ٧ – ٢ص

س = $\frac{(١٥ - ٤ص)}{٣}$

وبتساوي القيمتين

$\because$ ٧ ـ ٢ص = $\frac{(١٥ - ٤ص)}{٣}$ بضرب طرفي المعادلة × ٣

٣ (٧ ـ ٢ص) = $\frac{\cancel{٣}(١٥ - ٤ص)}{\cancel{٣}}$

٢١ ـ ٦ص = ١٥ ـ ٤ص

ـ٦ص + ٤ص = ١٥ ـ ٢١

ـ٢ص = ـ٦ بقسمة الطرفين على ـ٢

$\frac{-٢ص}{-٢} = \frac{-٦}{-٢}$

$\therefore$ ص = ٣

بتعويض قيمة ص في المعادلة الأولى س = ٧ ـ ٢ص

س = ٧ ـ (٢ × ٣)

س = ٧ ـ ٦

$\therefore$ س = ١

$\therefore$ مجموعة الحل = { (١ ، ٣) }

مثال (٢):

حل المعادلتين الآنيتين مستعملاً الحذف بالمقابلة.

٢س ـ ٣ص = ١٢

٤س + ٥ص = ٢

الحل:

نحسب قيمتي س من المعادلتين بدلالة ص (نجعل س موضوعاً للقانون)

المعادلة الأولى: ∵ ٢س − ٣ص = ١٢

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{(١٢ + ٣ص)}}{\text{٢}} \qquad \text{(١)}$$

المعادلة الثانية: ∵ ٤س + ٥ص = ٢

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{(٢ − ٥ص)}}{\text{٤}} \qquad \text{(٢)}$$

وبتساوي القيمتين في (١) و (٢)

$$\therefore \frac{\text{(١٢ + ٣ص)}}{\text{٢}} = \frac{\text{(٢ − ٥ص)}}{\text{٤}}$$ بضرب طرفي المعادلة × ٤

$$\frac{\overset{\text{٢}}{\cancel{\text{٤}}}\text{(١٢ + ٣ص)}}{\cancel{\text{٢}}} = \frac{\cancel{\text{٤}}\text{(٢ − ٥ص)}}{\cancel{\text{٤}}}$$

٢٤ + ٦ص = ٢ − ٥ص

٦ص + ٥ص = ٢ − ٢٤

١١ص = −٢٢ بقسمة طرفي المعادلة على ١١

∴ ص = −٢

بتعويض قيمة ص = −٢ في احدى المعادلتين (المعادلة الأولى مثلاً)

$$\text{س} = \frac{\text{١٢ + ٣ص}}{\text{٢}}$$

$$\text{س} = \frac{\text{١٢ − ٦}}{\text{٢}}$$

∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = { (٣ ، −٢) }

تمرين (٥)

مستخدماً طريقة الحذف بالمقابلة حل أزواج المعادلات الآنية الآتية:

(س، ص ∈ ح)

١) ص = س + ١ ، س = ٢ص – ٥

٢) ص = ٥ – س ، ص – س = ١

٣) س + ص – ٧ = ٠ ، ص = ١٠ – ٢س

٤) ٢س – ص = ١ ، س + ٢ص = ٨

٥) س – ص – ١ = ٠ ، ٢س + ص – ١ = ٠

٦) ٢س – ٣ص = ٢ ، س + ٣ص = ٤

٧) س – ص = ٦ ، $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٥}$

٨) $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{٢\text{ص}}{٣}$ ، $\frac{\text{س} + ٢\text{ص}}{٥} = ٢$

(٣-٦) الطريقة الثالثة: طريقة الحذف بالتعويض

تمهيد:

لحل معادلتين آنيتين في الصورة أ س + ب ص = جـ بطريقة الحذف بالتعويض نتبع الخطوات الآتية:

أولاً: نضع احدى المعادلتين على الصورة:

ص = $\frac{\text{جـ} - \text{أ س}}{\text{ب}}$ ، حيث ب ≠ ٠ ونسميها المعادلة (٣) أي أننا نجعل ص موضوعاً للقانون

ثانياً: نقوم بالتعويض عن ص في المعادلة الأخرى فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى في مجهول واحد (س) نجد منها قيمة س

ويمكن التعويض عن س بدلاً عن ص بوضع س موضوعاً للقانون على صورة:

س = $\frac{(\text{جـ} - \text{ب ص})}{\text{أ}}$ ، حيث أ ≠ ٠

ويلاحظ أنه مهما كانت طريقة الحذف سواء بالجمع أو بالمقابلة أو بالتعويض فهي توصلنا إلى معادلة بمجهول واحد نحلها وبالتالي نتوصل إلى حل نظام المعادلتين الآنيتين.

مثال (١):

جد مجموعة حل المعادلتين الآنيتين الآتيتين مستعملاً طريقة الحذف بالتعويض:

٥س − ٢ص = ١ (١)

٢س + ص = ٤ (٢)

الحل:

نحسب ص من المعادلة الثانية بدلالة س ، أي نجعل ص موضوعاً للقانون

ص = ٤ – ٢س   (٣)

نعوض قيمة ص بدلالة س في المعادلة (١)

٥س – ٢ (٤ – ٢س) = ١   (تحولت المعادلة الأولى إلى معادلة بمجهول واحد س ، نحل المعادلة لنحصل على قيمة س)

٥س – ٨ + ٤س = ١

٥س + ٤س = ١ + ٨

٩س = ٩

∴ س = ١

نعوض قيمة س = ١ في المعادلة (٣)   ص = ٤ – ٢س

ص = ٤ – (٢ × ١) = ٤ – ٢

∴ ص = ٢

∴ مجموعة الحل = { (١ ، ٢) }

مثال (٢):

جد مجموعة حل المعادلتين الآنيتين الآتيتين مستعملاً طريقة الحذف بالتعويض:

٢س + ٣ص = ٩   (١)

٣س – ٢ص = ٧   (٢)

الحل:

نوجد قيمة س بدلالة ص من المعادلة (١)

$$\text{س} = \frac{(\text{٩} - \text{٣ص})}{\text{٢}} \qquad (\text{٣})$$

نعوض قيمة س من المعادلة (٣) في المعادلة (٢)

$$\frac{\text{٣}(\text{٩} - \text{٣ص})}{\text{٢}} - \text{٢ص} = \text{٧}$$

$$\frac{(\text{٢٧} - \text{٩ص})}{\text{٢}} - \text{٢ص} = \text{٧}$$ بضرب طرفي المعادلة في ٢

$$\text{٢}\left[\frac{(\text{٢٧} - \text{٩ص})}{\text{٢}} - \text{٢ص}\right] = \text{٧} \times \text{٢}$$

$$\frac{\text{٢}(\text{٢٧} - \text{٩ص})}{\text{٢}} - (\text{٢} \times \text{٢ص}) = \text{١٤}$$

$$\text{٢٧} - \text{٩ص} - \text{٤ص} = \text{١٤}$$

$$-\text{١٣ص} = \text{١٤} - \text{٢٧}$$

$$-\text{١٣ص} = -\text{١٣}$$ بقسمة طرفي المعادلة على –١٣

$$\frac{-\cancel{\text{١٣}}\text{ص}}{-\cancel{\text{١٣}}} = \frac{-\text{١٣}}{-\text{١٣}}$$

$$\therefore \quad \text{ص} = \text{١}$$

نعوض ص بقيمة ١ في المعادلة (٣) $\text{س} = \frac{\text{٩} - \text{٣ ص}}{\text{٢}}$

$$س = \frac{٩ - (٣ \times ١)}{٢}$$

$$س = \frac{٦}{٢}$$

$\therefore$ س = ٣

$\therefore$ مجموعة الحل = { (٣ ، ١) }

مثال (٣):

حل المعادلتين الآنيتين الآتيتين مستعملاً التعويض:

٢س + ص = ٣ (١)

س – ٢ص = ٤ (٢)

الحل:

من المعادلة (١): ص = ٣ – ٢س (٣)

بتعويض قيمة ص من المعادلة (٣) في المعادلة (٢)

س – ٢ (٣ – ٢س) = ٤

س – ٦ + ٤س = ٤

س + ٤س = ٤ + ٦

٥س = ١٠

$\therefore$ س = ٢

بتعويض قيمة س = ٢ في المعادلة (٣)

ص = ٣ – (٢ × ٢) = ٣ – ٤

∴ ص = –١

∴ مجموعة الحل = { (٢ ، –١) }

تمرين (٦)

١) استخدم طريقة التعويض لحل المعادلات الآتية:

أ/ ٢س – ص = ١ ، س + ٢ص = ٨

ب/ س + ص = ٤ ، ص = س + ٢

جـ/ س – ص – ١ = ٠ ، ٢س + ص – ١١ = ٠

د/ س + ص – ٧ = ٠ ، ص = ١٠ – ٢س

هـ/ س = ص + ١ ، ٢ص = ٣ – س

٢) حل المعادلات الآتية:

أ/ ٣س – ص = –٦ ، ٢ص + ٣س = ١٢

ب/ ٥س + ٣ص = ١ ، س – ٢ص = ٨

جـ/ ٢س + ٣ص = –١ ، ٥س – ٢ص = ٧

د/ ٤س + ٣ص = –٢ ، ٢س – ٥ص – ١٢ = ٠

هـ/ $\frac{\text{س + ص}}{٣}$ = ٢ ، ٣س + $\frac{٢}{٥}$ ص = ٥

(٣- ٧) مسائل لفظية على المعادلات الآنية

توجد مسائل في حياتنا يقتضي حلها استخدام مفهوم المعادلات الآنية، وعادة في هذه المسائل يكون لدينا مجهولان يُراد معرفة قيمة كل مجهول منهما، وتكون هذه المسائل مصاغة في صورة جمل لفظية، لذلك فإننا نترجمها إلى جمل رياضية في صورة معادلات آنية لكي نتوصل إلى قيمة كل مجهول، وإليك بعض الأمثلة الآتية:

مثال (١):

عددان ثلاثة أمثال أكبرهما يزيد عن ضعف أصغرهما بمقدار ٩، و٤ أمثال الأكبر يزيد عن ٥ أمثال الأصغر بمقدار ٥ ، فما العددان ؟

الحل:

نفرض أن العدد الأكبر س ، والعدد الأصغر ص

ثلاثة أمثال العدد الأكبر = ٣س

ضعف العدد الأصغر = ٢ص

أولاً: ثلاثة أمثال الأكبر يزيد عن ضعف الأصغر بمقدار ٩ ،
أي أن ثلاثة أمثال الأكبر – ضعف الأصغر = ٩

٣س – ٢ص = ٩ (١) المعادلة الأولى

ثانياً: ٤ أمثال الأكبر يزيد عن ٥ أمثال الأصغر بمقدار ٥

٤س – ٥ص = ٥ (٢) المعادلة الثانية

لقد حصلنا على معادلتين (كل معادلة فيها مجهولان) يمكن حلهما آنياً وذلك بالخطوات الآتية:

بضرب طرفي المعادلة (١) في ٤ نحصل على:

$٤ (٣س - ٢ص) = ٩ \times ٤$

$١٢س - ٨ص = ٣٦ \qquad (٣)$

بضرب طرفي المعادلة (٢) في -٣

$-٣ (٤س - ٥ص) = ٥ \times -٣$

$-١٢س + ١٥ص = -١٥ \qquad (٤)$

بجمع المعادلتين (٣)، (٤)

$\cancel{١٢س} - ٨ص = ٣٦$

$-\cancel{١٢س} + ١٥ص = -١٥$

$٧ص = ٢١$

$ص = \frac{٢١}{٧}$

$\therefore ص = ٣$

نعوض قيمة ص في المعادلة (١) ٣س - ٢ص = ٩

$٣س - (٢ \times ٣) = ٩$

$٣س - ٦ = ٩$

$٣س = ٩ + ٦$

$٣س = ١٥$

$\therefore س = ٥$

$\therefore$ العدد الأكبر = ٥ ، العدد الأصغر = ٣

تحقق من صحة الحل بتعويض س = ٥ ، ص = ٣ في كلٍ من المعادلتين.

مثال (٢):

محيط مستطيل ٢٠ سم ، يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٢ سم ، ما طول المستطيل وعرضه ؟

الحل:

نفرض أن طول المستطيل س سم ، وعرضه ص سم

∵ محيط المستطيل = الطولين + العرضين

∴ ٢٠ = ٢س + ٢ص

نرتب المعادلة:

٢س + ٢ص = ٢٠ (١)

∵ طول المستطيل يزيد عن عرضه بمقدار ٢

∴ س – ص = ٢ (٢)

بضرب المعادلة (٢) في ٢ ينتج:

٢س – ٢ص = ٤ (٣)

بجمع المعادلة (١) والمعادلة (٣)

٢س + ~~٢ص~~ = ٢٠ (١)

٢س – ~~٢ص~~ = ٤ (٣)

٤س = ٢٤

∴ س = ٦

نعوض عن قيمة س في المعادلة (٢) س – ص = ٢

٦ ـ ص = ٢

ـ ص = ٢ ـ ٦

ـ ص = ـ٤ بقسمة الطرفين على ـ١

∴ ص = ٤

∴ طول المستطيل = ٦ سم

عرض المستطيل = ٤ سم

مثال (٣):

قبل ٣ سنوات كان عُمُر أبراهيم ضعف عُمُر أخيه هارون، وبعد ٥ سنوات من الآن يصير عُمُر هارون $\frac{٣}{٤}$ عُمُر أخيه إبراهيم ، جد عُمرُ كلٍ منهما الآن ؟

الحل:

نفرض أن عُمُر إبراهيم الآن = س سنة

نفرض أن عُمُر هارون الآن = ص سنة

عُمُر إبراهيم قبل ٣ سنوات = س ـ ٣

عُمُر هارون قبل ٣ سنوات = ص ـ ٣

∵ عُمُر إبراهيم قبل ٣ سنوات = ضعف عُمُر هارون قبل ٣ سنوات

∴ س ـ ٣ = ٢ (ص ـ ٣)

س ـ ٣ = ٢ص ـ ٦ نرتب المعادلة

س ـ ٢ص = ـ٦ + ٣

س ـ ٢ص = ـ٣ (١) المعادلة الأولى

عُمُر إبراهيم بعد ٥ سنوات = س + ٥

عُمُر هارون بعد ٥ سنوات = ص + ٥

$\because$ عُمُر هارون بعد ٥ سنوات = $\frac{٣}{٤}$ عُمُر إبراهيم بعد ٥ سنوات

$\therefore$ ص + ٥ = $\frac{٣}{٤}$ (س + ٥) بضرب طرفي المعادلة في ٤

٤ (ص + ٥) = $\cancel{٤} \times \frac{٣}{\cancel{٤}}$ (س + ٥)

$\therefore$ ٤ص + ٢٠ = ٣س + ١٥ نرتب المعادلة

٣س – ٤ص = ٢٠ – ١٥

٣س – ٤ص = ٥ (٢)

من المعادلة الأولى س – ٢ص = –٣

$\therefore$ س = ٢ص – ٣

نعوض عن قيمة س = ٢ص – ٣ في المعادلة (٢)

٣ (٢ص – ٣) – ٤ص = ٥

٦ص – ٩ – ٤ص = ٥

٦ص – ٤ص = ٥ + ٩

٢ص = ١٤

$\therefore$ ص = ٧

نعوض قيمة ص = ٧ في المعادلة (١) س – ٢ص = –٣

س – (٢ × ٧) = –٣

س – ١٤ = –٣

س = –٣ + ١٤

∴ س = ١١

∴ عُمُر إبراهيم = ١١ سنة

عُمُر هارون = ٧ سنوات

التحقق من صحة الحل:

الآن عُمُر إبراهيم = ١١ سنة ، عُمُر هارون = ٧ سنوات

قبل ٣ سنوات : عُمُر إبراهيم = ٨ سنوات ، عُمُر هارون = ٤ سنوات

عُمُر أبراهيم قبل ٣ سنوات (٨ سنوات) = ضعف عُمُر هارون قبل ٣ سنوات (٤ سنوات)

بعد ٥ سنوات : عُمُر إبراهيم = ١٦ سنة ، عُمُر هارون = ١٢ سنة

$\frac{٣}{٤}$ عُمُر إبراهيم = $\frac{٣}{\cancel{٤}} \times \cancel{١٦}$ = ١٢ سنة = عُمُر هارون

تذكر:

العدد ٣٢ مثلاً يتكون من رقمين هما ٢ ، ٣ حيث ٢ هو رقم الآحاد ، ٣ هو رقم العشرات

مجموع الرقمين = ٢ + ٣ = ٦

العدد ٣٢ = ٢ + (١٠ × ٣) = ٢ + ٣٠

إذا كان العدد = ٣٢ فإن العدد المكوّن من معكوس الرقمين = ٢٣

مثال (٤):

عدد مكون من رقمين ، يساوي ٧ أمثال مجموع رقميه، ويزيد عن العدد المكون من معكوس الرقمين بمقدار ١٨ ، ما العدد ؟

الحل:

نفرض أن رقم الآحاد س ، رقم العشرات ص

∴ العدد = س + ١٠ص

مجموع الرقمين = س + ص

∵ العدد = ٧ أمثال مجموع رقميه

∴ س + ١٠ص = ٧ (س + ص)

س + ١٠ص = ٧س + ٧ص نرتب المعادلة

٧س + ٧ص – س – ١٠ص = ٠

٦س – ٣ص = ٠ بقسمة طرفي المعادلة على ٣

٢س – ص = ٠

∴ ص = ٢س (١)

العدد المكون من معكوس الرقمين = ص + ١٠س

∵ العدد يزيد عن معكوس الرقمين بمقدار ١٨

∴ العدد – العدد المكون من معكوس الرقمين = ١٨

∴ س + ١٠ ص – (ص + ١٠س) = ١٨

س + ١٠ص – ص – ١٠س = ١٨

٩ص – ٩س = ١٨ بقسمة طرفي المعادلة على ٩

ص – س = ٢ (٢)

ولكن ص = ٢س (من المعادلة (١))

نعوض ص = ٢س في المعادلة (٢) ص – س = ٢

∴ ٢س – س = ٢

س = ٢

∵ ص = ٢س

∴ ص = ٢ × ٢ =٤

∴ س = ٢ ، ص = ٤

∴ رقم الآحاد ٢ ، رقم العشرات ٤

∴ العدد = ٤٢

التحقق من الحل:

العدد ٤٢ ، مجموع رقميه = ٢ + ٤ = ٦

٢٤ = ٧ × ٦ (٧ أمثال مجموع الرقمين)

معكوس رقمي العدد ٤٢ هو ٢٤

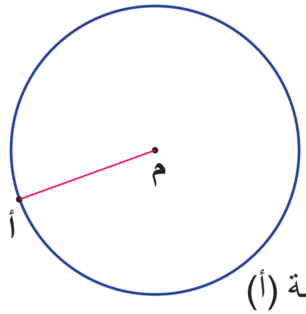
العدد (٢٤) يزيد عن العدد المكون من معكوس الرقمين بمقدار ١٨

٤٢ – ٢٤ = ١٨

الوحدة الرابعة

الدائرة

(٤-١) المفاهيم الأساسية للدائرة:



نشاط (١):

١- ارسم دائرة ثُم حدّد مركزها (م) .

٢- ضع نقطة على محيط الدائرة فلتكن (أ)

٣- صِل بقطعة مستقيمة من مركز الدائرة (م) إلى النقطة (أ)

- القطعة المستقيمة $\overline{\text{م أ}}$ تسمى نصف قطر الدائرة ويرمز لها بالرمز نق

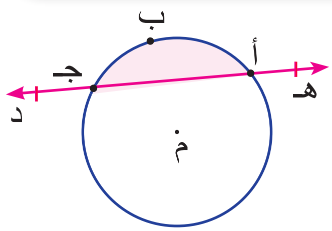
مفهوم أساسي

نصف قطر الدائرة هو القطعة المستقيمة التي تصل بين مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة (محيطها).

٤- من الدائرة التي قمت برسمها ضع تعريفاً لها.

مفهوم أساسي

الدائرة هي مجموعة من النقاط في المستوى التي تبعد عن نقطة ثابتة (المركز) بعداً ثابتاً (نصف القطر).



نشاط (٢):

١. ارسم دائرة مركزها (م).

٢. ضع ثلاث نقاط أ ، ب ، جـ على محيط الدائرة.

- هذا الجزء من محيط الدائرة المحصور بالنقاط أ ، ب ، جـ يسمى القوس ويرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ ب جـ}}$

مفهوم أساسي

القوس هو جزء من محيط الدائرة.

٣. صل النقطتين أ ، جـ بقطعة مستقيمة.

- القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ جـ}}$ تسمى الوتر

مفهوم أساسي

الوتر هو القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتين من نقاط الدائرة.

٤. ظلّل المساحة من الدائرة المحصورة بين الوتر $\overline{\text{أ جـ}}$ والقوس $\overset{\frown}{\text{أ ب جـ}}$

- هذا الجزء الذي تم تظليله يسمى **القطعة الدائرية**.

مفهوم أساسي

القطعة الدائرية هي جزء من مساحة الدائرة محصورة بين وتر وقوس.

٥. مدّ الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ على جانبيه لينتج المستقيم $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$.

- المستقيم $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ يسمى القاطع.

مفهوم أساسي

القاطع هو مستقيم يحتوي على وتر في الدائرة

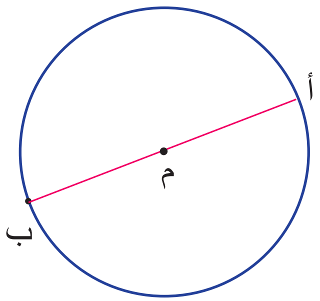
نشاط (٣):

١. ارسم دائرة ثم حدّد مركزها (م).

٢. ارسم نصف القطر $\overline{\text{أ م}}$.

٣. مدّ نصف القطر $\overline{\text{أ م}}$ ليقطع الدئرة عند (ب).

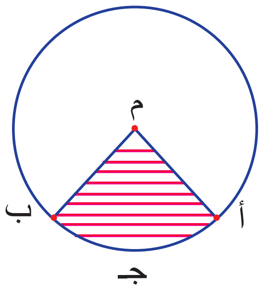
- القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ تسمى القطر.



مفهوم أساسي

القطر هو وتر الدائرة الذي يمر بمركزها

نشاط (٤):



١ . ارسم دائرة ثم حددّ مركزها (م)

٢ . ارسم نصفي قطرين للدائرة فليكونا $\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$

الزاوية ∢ أ م ب تسمى **الزاوية المركزية**.

مفهوم أساسي

الزاوية المركزية هي الزاوية التي يقع رأسها في مركز الدائرة وضلعاها نصفا قطرين.

٣ . ضع النقطة (جـ) على محيط الدائرة.

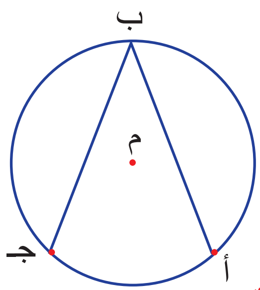
٤ . ظلّل المساحة من الدائرة المحصورة بين القوس $\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$ ونصفي القطرين $\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$.

- الجزء الذي تم تظليله يسمى القطاع الدائري.

مفهوم أساسي

القطاع الدائري هو جزء من مساحة الدائرة محصورة بين قوس ونصفي قطرين.

نشاط (٥):



١ . ارسم دائرة حدّد مركزها (م).

٢ . ضع النقاط أ ، ب ، جـ على محيطها

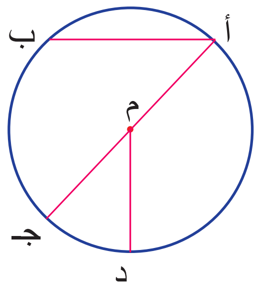
٣ . ارسم الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ والوتر $\overline{\text{ب جـ}}$

- الزاوية الناتجة ∢ أ ب جـ تسمى الزاوية المحيطية.

مفهوم أساسي

الزاوية المحيطية هي الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة ضلعاها وتران في الدائرة.

تمرين (١)



من الشكل المقابل:

١. أ ب يسمى ....

٢. هل أ جـ وتر؟ .... ولماذا؟ ....

٣. أذكر ثلاثة أقواس .... ،........ ، ....

٤. ظللّ قطاعاً دائرياً.

٥. ظللّ قطعة دائرية.

٦. سم زاوية محيطية ....

٧. سم زاوية مركزية ....

(٤ـ ٢) الأوتار المتساوية والأقواس المتساوية:

تمهيد:

إذا قسّمنا الدائرة إلى قطاعات دائرية ذات زوايا مركزية متساوية وكانت قيمة الزاوية المركزية ١٠ درجات فإننا نحصل على ٣٦ قطاعاً دائرياً لأن مجموع الزوايا المجتمعة في المركز ٣٦٠ درجة . وسنجد أن أقواس هذه القطاعات متساوية. وعليه نجد أنّ:

طول قوس كل قطاع = $\frac{١}{٣٦}$ من الدائرة (محيط الدائرة).

أي $\frac{١٠}{٣٦٠}$ من الدائرة ومن هذا نستنتج أنّ:

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{الزاوية المركزية}}{٣٦٠}$$

مفهوم أساسي

$\therefore$ طول القوس = $\frac{\text{الزاوية المركزية}}{٣٦٠}$ × محيط الدائرة

نشاط:

١. ارسم دائرة بطول نصف قطر مناسب.

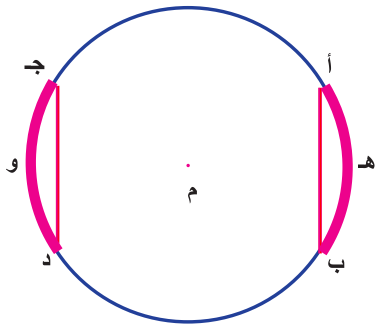
٢. مستخدماً المسطرة ارسم الوتران $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ حيث $\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{جـ د}}$

٣. ضع النقطة (هـ) بين أ ، ب

والنقطة (و) بين جـ ، د كما في الشكل المقابل.

٤. مستخدماً شريط الحناء اللاصق والمسطرة قس طول القوسين $\overset{\frown}{\text{أ هـ ب}}$ ، $\overset{\frown}{\text{جـ و د}}$.

٥. قارن بين طولي القوسين $\overset{\frown}{\text{أ هـ ب}}$ ، $\overset{\frown}{\text{جـ و د}}$ ماذا تلاحظ؟



مما سبق نجد أنّ:

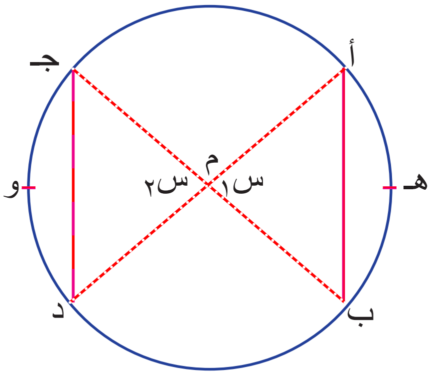
نظرية (١)

الأوتار المتساوية في الدائرة نفسها (أو الدوائر المتساوية) تقطع أقواساً متساوية.

البرهان الرياضي :

المعطى : دائرة مركزها (م) فيها $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران

$\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{جـ د}}$



المطلوب اثباته : $\overset{\frown}{\text{أ هـ ب}} = \overset{\frown}{\text{جـ و د}}$

العمل : صل $\overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$

البرهان :

من Δ أ ب م ، Δ جـ د م

$\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{جـ د}}$ (معطى)

$\overline{\text{أم}} = \overline{\text{م د}}$ (نصفا قطرين)

$\overline{\text{ب م}} = \overline{\text{م جـ}}$ (نصفا قطرين)

المثلثان متطابقان (ض ، ض، ض)

$\therefore$ $\text{س}_1 = \text{س}_2$

وبما أنّ : طول القوس $= \dfrac{\text{الزاوية المركزية}}{٣٦٠} \times$ محيط الدائرة

ومحيط الدائرة = ٢ × π × نق

$\therefore$ $\overset{\frown}{\text{أ هـ ب}} = \dfrac{\text{س}_1}{٣٦٠} \times ٢ \times \pi \times \overline{\text{أ م}}$

$\overset{\frown}{\text{جـ و د}} = \dfrac{\text{س}_2}{٣٦٠} \times ٢ \times \pi \times \overline{\text{م د}}$

وبما انّ: $\text{س}_1 = \text{س}_2$ ، $\overline{\text{أ م}} = \overline{\text{م د}}$

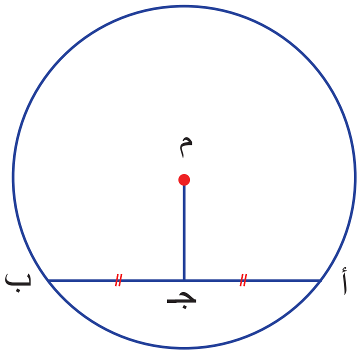
$\therefore$ $\overset{\frown}{\text{أ هـ ب}} = \overset{\frown}{\text{جـ و د}}$

ومما سبق يمكننا القول أيضاً أنّ:

نتيجة: الأقواس المتساوية في الدائرة نفسها (أو الدوائر المتساوية) تقطعها أوتاراً متساوية

(٤-٣) النظرية (٢):

نشاط:



١. ارسم دائرة وحدّد مركزها (م)

٢. ارسم الوتر $\overline{\text{أ ب}}$

٣. مستخدماً المسطرة والقياس ضع النقطة (جـ) عند منتصف الوتر $\overline{\text{أ ب}}$

٤. صل مركز الدائرة (م) مع النقطة (جـ) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

٥. قس $\measuredangle$ أ جـ م ماذا تلاحظ؟

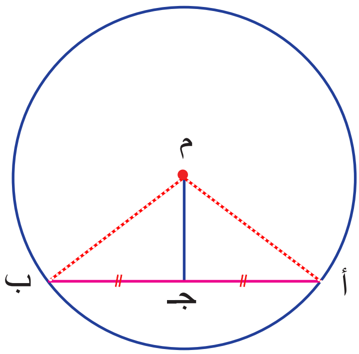
٦. صغ نصاً رياضياً يعبّر عن النتائج التي تحصلت عليها.

مما سبق يمكن التوصل إلى:

نظرية (٢):

المستقيم الذي يصل منتصف الوتر بمركز الدائرة يكون عمودياً على الوتر

البرهان الرياضي:



المعطى: دائرة مركزها (م)

جـ منتصف الوتر $\overline{\text{أ ب}}$

المطلوب اثباته : $\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

العمل : صل أ م ، ب م

البرهان:

في Δ أ جـ م ، Δ ب جـ م

$\overline{\text{أ جـ}} = \overline{\text{ب جـ}}$ (معطى)

$\overline{أم} = \overline{بم}$ (نصفا قطرين)

$\overline{مجـ} = \overline{مجـ}$ (مشترك)

$\therefore$ المثلثان متطابقان (ض ،ض ،ض)

$\therefore$ $\measuredangle$ أ جـ م = $\measuredangle$ ب جـ م

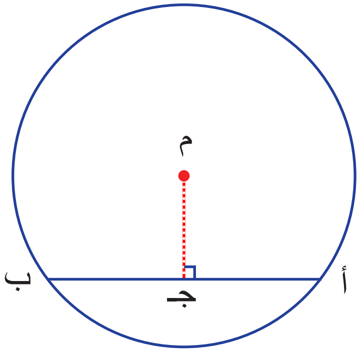
ولكن $\measuredangle$ أ جـ م + $\measuredangle$ ب جـ م = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)

$\measuredangle$ أ جـ م = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠°

$\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$

(٤-٤) النظرية (٣):

نشاط:



١. ارسم دائرة وحدّد مركزها (م)

٢. ارسم وتر للدائرة (م) بطول مناسب

٣. ارسم عمود من المركز (م) على الوتر

أ ب عند (جـ) ، ∢ أ جـ م = ٩٠°

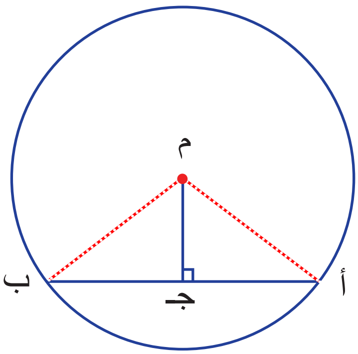
٤. قس طول أ ب ، أ جـ ، جـ ب ثم قارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

٥. صغ نصاً رياضياً يعبّر عن النتائج التي تحصلت عليها.

مما سبق يمكننا القول أنّ:

نظرية (٣) : العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر ينصف الوتر

البرهان الرياضي:



المعطى: دائرة مركزها (م)

م جـ ⊥ أ ب

المطلوب اثباته:

العمود م جـ ينصف الوتر أ ب

العمل: صل م أ ، م ب

البرهان:

في ∆ أ جـ م ، ∆ ب جـ م

أ م = ب م (نصفا قطرين)

∢ أ جـ م = ∢ ب جـ م = ٩٠° (معطى)

م جـ = م جـ (مشترك)

∴ المثلثان متطابقان (ض، و ، ق)

∴ $\overline{\text{أ جـ}}$ = $\overline{\text{جـ ب}}$

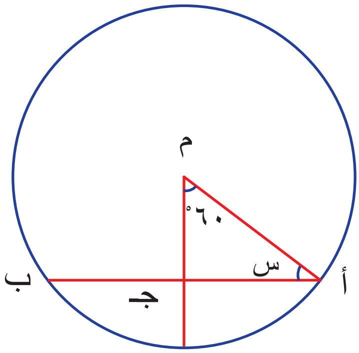
∴ العمود النازل $\overline{\text{م جـ}}$ ينصّف الوتر $\overline{\text{أ ب}}$

ومما سبق يمكننا القول ايضاً أن:

نتيجة:

المنصّف العمودي لأي وتر في الدائرة يمر بمركز الدائرة

مثال(١):



في الشكل المقابل $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة (م)

جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

جد قيمة س

الحل:

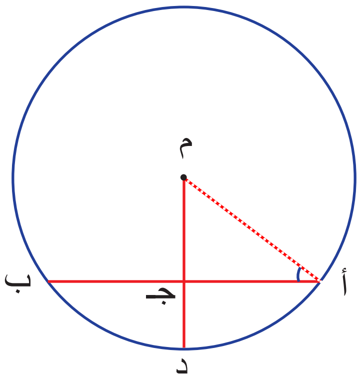
∠ أ جـ م = ٩٠° (نظرية)

بما أنّ: مجموع زوايا المثلثات = ١٨٠°

س + ٩٠ + ٦٠ = ١٨٠°

∴ س = ٣٠°

مثال (٢):



في الشكل المقابل:

دائرة نصف قطرها = ٥ سم

نصف القطر $\overline{\text{م د}}$ ينصّف الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ عند جـ

$\overline{\text{أ جـ}}$ = ٤سم

جد طول $\overline{\text{جـ د}}$

الحل:

صل $\overline{\text{أ م}}$

∡ أ جـ م = ٩٠° (نظرية)

∴ Δ أ جـ م قائم الزاوية

من نظرية فيثاغورث

$\overline{\text{أ م}}^{٢} = \overline{\text{أ جـ}}^{٢} + \overline{\text{م جـ}}^{٢}$

$(٥)^{٢} = (٤)^{٢} + \overline{\text{م جـ}}^{٢}$

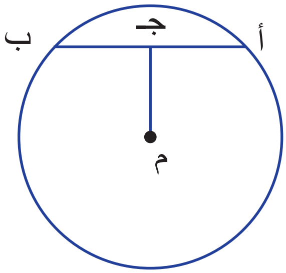
∴ $\overline{\text{م جـ}}$ = ٣ سم

$\overline{\text{م د}}$ يمثّل نصف قطر

∴ $\overline{\text{جـ د}} = \overline{\text{م د}} - \overline{\text{م جـ}}$

= ٥ − ٣ = ٢ سم

تمرين (٢)



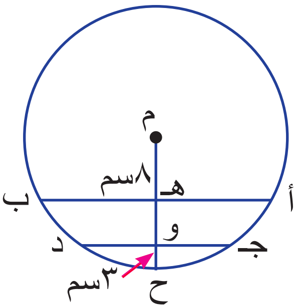
(١) في الشكل المقابل:

دائرة مركزها (م)

نصف قطرها = ١٠ سم

النقطة جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ = ٦ سم

جد طول الوتر $\overline{\text{أ ب}}$



(٢) في الشكل المقابل:

دائرة مركزها (م)

نصف القطر $\overline{\text{م ح}}$ يمر بمنتصفات الأوتار

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ عند هـ ، و

$\overline{\text{م هـ}}$ = ٨ سم

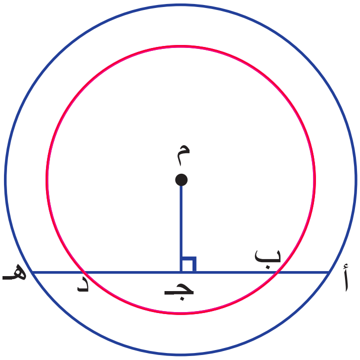
$\overline{\text{و ح}}$ = ٣ سم

$\overline{\text{أ ب}}$ = ٣٠ سم

جد طول:

أ/ $\overline{\text{م ب}}$ ب/ $\overline{\text{هـ و}}$ د/ $\overline{\text{جـ د}}$

(٣) في الشكل المقابل:



دائرتين مركزهما م

المستقيم $\overline{\text{أ هـ}}$ يقطع الدائرة الكبرى عند أ ، هـ

والصغرى عند ب ، د

اثبت أنّ:

$\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{د هـ}}$

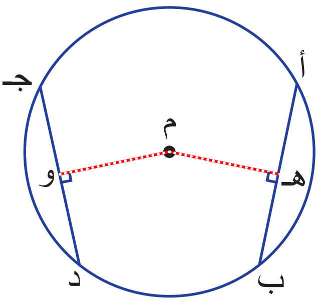
(٤) $\overline{\text{أ ب}}$ قطر ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتر في دائرة مركزها م ، د نقطة على الـــوتر $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث

$\overline{\text{م د}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ جـ}}$

اثبت أنّ: $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٢ $\overline{\text{م د}}$

(٤ـ ٥) تطبيقات على العمود النازل من مركز الدائر:

نشاط:



١. ارسم دائرة وحدّد مركزها (م)

٢. ارسم الوترين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ حيث $\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{جـ د}}$

٣. ارسم العمودي $\overline{\text{م هـ}}$ على $\overline{\text{أ ب}}$

والعمودي $\overline{\text{م و}}$ على $\overline{\text{جـ د}}$

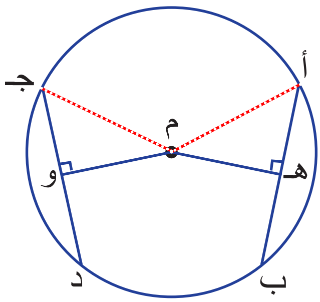
٤. قس $\overline{\text{م هـ}}$ ، $\overline{\text{م و}}$ ثم قارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

٥. صغ نصاً رياضياً يوضح النتائج التي تحصلت عليها

مما سبق يمكننا التوصل إلى:

> **النظرية (٤):**
> إذا تساوى وتران في دائرة فإن بعديهما عن المركز متساويان

البرهان الرياضي:



المعطي: دائرة مركزها (م)

الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ = الوتر $\overline{\text{جـ د}}$

المطلوب اثباته : $\overline{\text{م هـ}}$ = $\overline{\text{م و}}$

العمل : صل $\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{جـ م}}$

البرهان:

بما أنّ $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ هـ}} = \frac{١}{٢}\,\overline{\text{أ ب}}$ (نظرية)

وبالطريقة نفسها $\overline{\text{جـ و}} = \frac{١}{٢}\,\overline{\text{جـ د}}$

ولكن $\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{جـ د}}$ (معطى)

∴ $\overline{أهـ} = \overline{جـ و}$

في Δ أ هـ م ، Δ جـ و م

$\overline{أ هـ} = \overline{جـ و}$ (بالبرهان)

$\overline{أ م} = \overline{جـ م}$ (نصفا قطرين)

∢أ هـ م = ∢ جـ و م = ٩٠° (معطى)

∴ المثلثان متطابقان (ض، و، ق)

∴ $\overline{م هـ} = \overline{م و}$

ومما سبق يمكننا القول ايضاً أنّ:

نتيجة:

إذا تساوى بعدا وترين من مركز الدائرة فإن طولي الوترين متساويان

مثال:

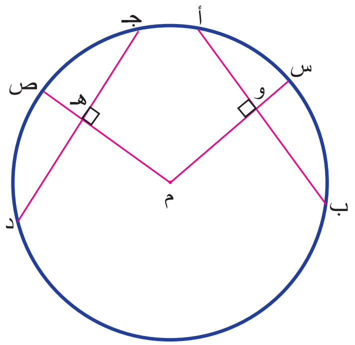
في الشكل المقابل : دائرة مركزها (م)

الوتر $\overline{أ ب}$ = الوتر $\overline{جـ د}$

$\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ في و

$\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{جـ د}$ في هـ

اثبت أنّ : $\overline{س و} = \overline{هـ ص}$



الحل:

$\overline{م س}$ نصف قطر للدائرة م

$\overline{م ص}$ نصف قطر للدائرة م

$\overline{م س} = \overline{م ص}$ (١)

بما أنّ : $\overline{أ ب} = \overline{جـ د}$ (معطى)

$\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ (معطى)

$\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{جـ د}}$ (معطى)

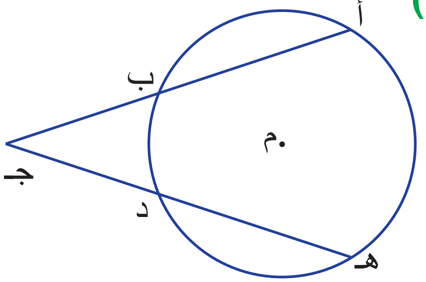
∴ $\overline{\text{م و}} = \overline{\text{م هـ}}$ (نظرية) (٢)

بطرح (٢) من (١)

$\overline{\text{م س}} - \overline{\text{م و}} = \overline{\text{م ص}} - \overline{\text{م هـ}}$

∴ $\overline{\text{س و}} = \overline{\text{هـ ص}}$

تمرين (٣)



١. في الشكل المقابل دائرة مركزها (م)

الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ = الوتر $\overline{\text{د هـ}}$

اثبت أنّ: $\overline{\text{ب جـ}} = \overline{\text{د جـ}}$

ارشاد:

(ارسم الأعمدة من م على $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{هـ د}}$ وصل $\overline{\text{م جـ}}$)

٢. يتقاطع وتران متساويان داخل دائرة اثبت أنّ:

المستقيم الذي يصل نقطة تقاطعهما مع المركز ينصّف الزاوية المحصورة بينهما.

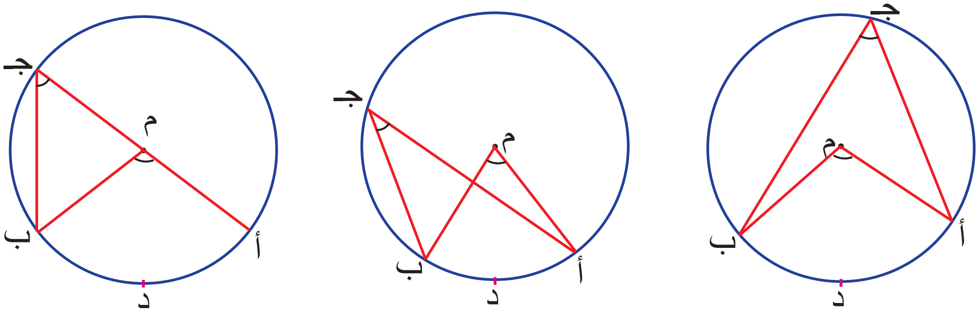
٣. $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران متساويان يتقاطعان داخل دائرة في زاوية قائمة اثبت أنّ:

نقطة التقاطع ومنتصفي الوترين ومركز الدائرة تكوّن رؤوس مربع.

(٤ـ ٦) الزاوية المركزية:

نشاط (١)

١. ارسم دائرة مركزها (م)



٢. حدّد على الدائرة القوس أ د ب

٣. ارسم زاوية مركزية ∠ أ م ب على القوس أ د ب

٤. ارسم زاوية محيطية ∠ أ جـ ب على القوس أ د ب

٥. قسّ ∠ أ م ب ، ∠ أ جـ ب ثم قارن بينهما . ماذا تلاحظ؟

٦. صغ نصاً رياضياً يعبّر عن النتائج التي تحصلت عليها.

مما سبق يمكننا التوصّل إلى:

نظرية (٥)

الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية المنشأة معها على القوس نفسه.

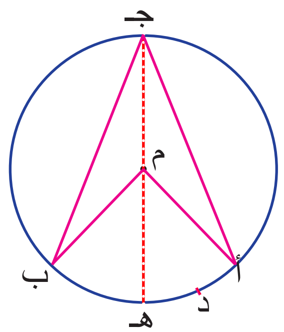
البرهان الرياضي:

المعطى: أ د ب قوس في دائرة مركزها (م)

جـ نقطة على باقِ محيط الدائرة

∠ أ م ب زاوية مركزية على القوس أ د ب

∠ أ جـ ب زاوية محيطية على القوس أ د ب



المطلوب اثباته: $\measuredangle$ أ م ب = ٢ $\measuredangle$ أ جـ ب

العمل: صل $\overline{\text{م جـ}}$ ومدّه إلى هـ.

البرهان:

$\measuredangle$ جـ أ م = $\measuredangle$ أ جـ م (زاويتا قاعدة في $\triangle$ متساوي الساقين)

$\measuredangle$ أ م هـ = $\measuredangle$ أ جـ م + $\measuredangle$ جـ أ م (زاوية خارجية في $\triangle$ أ م جـ)

$\therefore$ $\measuredangle$ أ م هـ = ٢ $\measuredangle$ أ جـ م (١)

وبالطريقة نفسها نجد أنّ:

$\measuredangle$ ب م هـ = $\measuredangle$ ٢ ب جـ م (٢)

بجمع (١) و (٢)

$\measuredangle$ أ م هـ + $\measuredangle$ ب م هـ = ٢ $\measuredangle$ أ جـ م + ٢ $\measuredangle$ ب جـ م

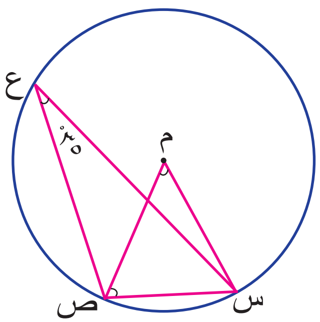
وبما أنّ:

$\measuredangle$ أ م هـ + $\measuredangle$ ب م هـ = $\measuredangle$ أ م ب

و$\measuredangle$ أ جـ م + $\measuredangle$ ب جـ م = $\measuredangle$ أ جـ ب

$\therefore$ $\measuredangle$ أ م ب = ٢ $\measuredangle$ أ جـ ب

مثال:



في الشكل المقابل: دائرة مركزها (م)

$\measuredangle$ س ع ص = ٣٥°

جد قيمة:

أ. $\measuredangle$ س م ص ب. $\measuredangle$ س ص م

الحل:

أ. $\measuredangle$ س م ص = ٢ $\measuredangle$ س ع ص = ٢ × ٣٥ = ٧٠°

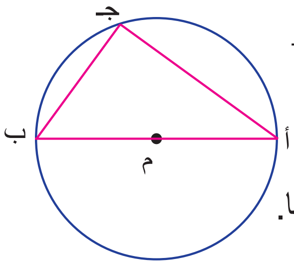
ب. $\triangle$ س ص م = متساوي الساقين

$\therefore$ ∢ س ص م = $\frac{180 - 70}{2}$ = ٥٥°

نشاط (٢):

١. ارسم دائرة مركزها (م)

٢. ارسم القطر $\overline{\text{أ ب}}$



٣. ارسم الزاوية المحيطية ∢ أ جـ ب على القطر $\overline{\text{أ ب}}$

٤. قسّ ∢ أ جـ ب.كم مقدارها؟

٥. ارسم عدة زوايا محيطية على القطر $\overline{\text{أ ب}}$ وقم بقياسها.

٦. ما مقدار كل الزوايا التي قمت برسمها؟

مما سبق يمكننا التوصّل إلى :

نظرية (٦):

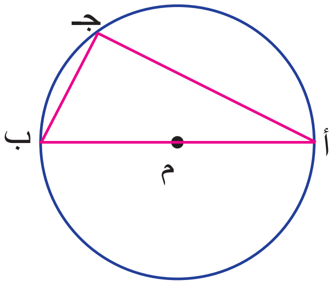
الزوايا المحيطية المرسومة على قطر الدائرة قائمة

البرهان الرياضي:

المعطى: دائرة مركزها م

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر

جـ نقطة على الدائرة (م)



المطلوب اثباته:

∢ أ جـ ب = ٩٠°

البرهان:

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر

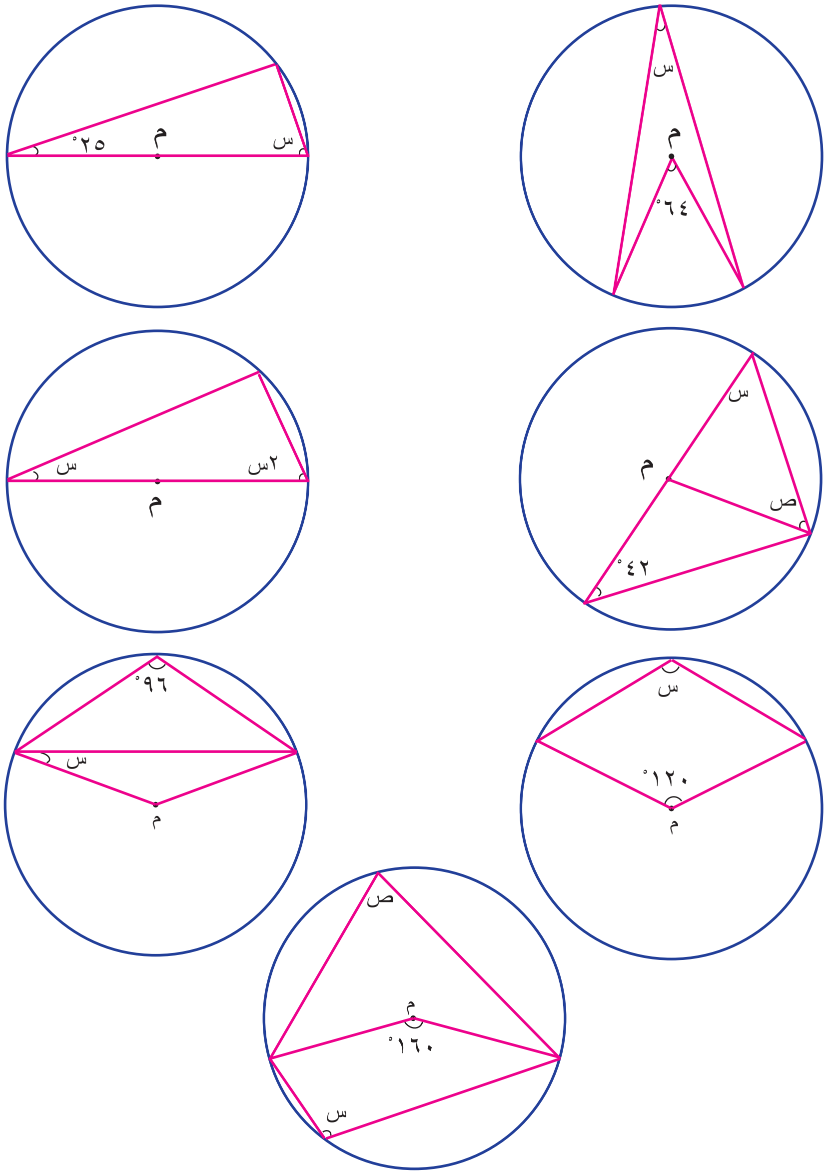
$\therefore$ ∢ أ م ب = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)

ولكن $\measuredangle$ أ جـ ب $= \frac{١}{٢}$ $\measuredangle$ أ م ب (نظرية)

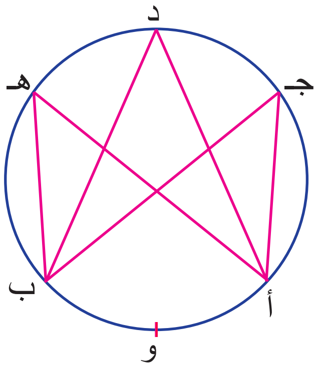
$\therefore$ $\measuredangle$ أ جـ ب $= \frac{١}{٢} \times ١٨٠ = ٩٠^\circ$

تمرين (٤)

جد قيم الزوايا المشار إليها بالحروف في الأشكال التالية (م مركز الدائرة)



(٤-٧) الزوايا المحيطية:



نشاط:

١. ارسم دائرة.

٢. حدّد على الدائرة القوس أ و ب

٣. ارسم الزوايا المحيطية:

∢ أ جـ ب ، ∢ أ د ب ، ∢ أ هـ ب

على القوس أ و ب

٤. قس الزوايا ∢ أ جـ ب ، ∢ أ د ب ، ∢ أ هـ ب ثم قارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

٥. صغ نصاً رياضياً يعبّر عن النتائج التي تحصلت عليها.

مما سبق يمكننا التوصل إلى النظرية التالية.

نظرية (٧)

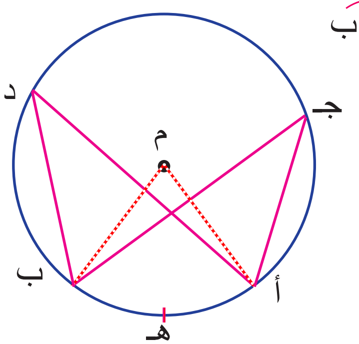
الزوايا المحيطية المنشأة على قوس في جهة واحدة متساوية

البرهان الرياضي:

المعطى: دائرة مركزها (م)

∢ أ جـ ب ، ∢ أ د ب منشأتان على القوس أ هـ ب

العمل: صل أ م ، ب م



البرهان:

∢ أ م ب = ٢ ∢ أ جـ ب (نظرية) (١)

∢ أ م ب = ٢ ∢ أ د ب (نظرية) (٢)

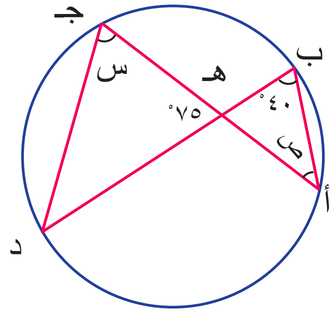
من (١) و (٢)

∴ ∢ أ جـ ب = ∢ أ د ب

مما سبق يمكننا التوصّل إلى:

نتيجة:
الزوايا المحيطية المنشأة على وتر في جهة واحدة متساوية.

مثال:



من الشكل المقابل:

جد قيم الزوايا المشار إليها بالحروف

الحل:

س = ٤٠ (نظرية)

∢ أ هـ ب = ٧٥° (تقابل بالرأس)

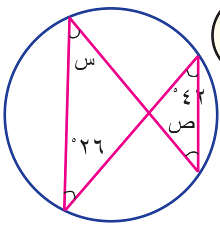
ص = ١٨٠ – (٤٠ + ٧٥°) (مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°)

∴ ص = ٦٥°

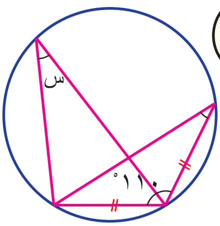
تمرين (٥)

أ/ جد قيم الزوايا المشار إليها بالحروف في الأشكال التالية:

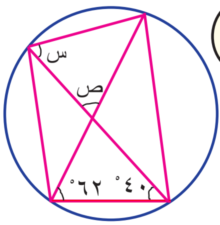
١



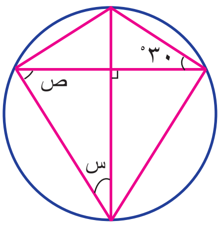
٢



٣



٤



ب/ أ نقطة خارج الدائرة (م) ، رُسم منها القاطعان أ ب جـ ، أ د هـ اثبت أنّ:

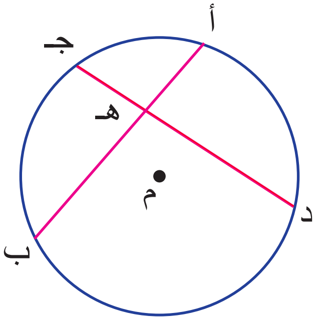
الزوايا المتناظرة في المثلثين Δ أ ب هـ ، Δ أ د جـ متساوية.

جـ/ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران متقاطعان في النقطة هـ داخل الدائرة اثبت أنّ :

الزوايا المتناظرة في المثلثين Δ أ هـ جـ ، Δ د هـ ب متساوية.

(٤ـ ٨) الأوتار المتقاطعة:

نشاط:



١. ارسم الدائرة (م)

٢. ارسم الوترين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ ليتقاطعا في النقطة هـ

٣. قس الأطوال $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ د}}$

٤. جد $\overline{\text{أ هـ}} \times \overline{\text{هـ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}} \times \overline{\text{هـ د}}$

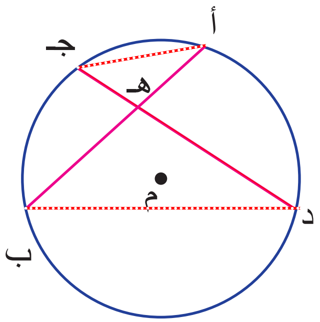
٥. قارن بين $\overline{\text{أ هـ}} \times \overline{\text{هـ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}} \times \overline{\text{هـ د}}$. ما تلاحظ؟

مما سبق يمكننا التوصل إلى:

النظرية (٨) إذا تقاطع أي وترين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ عند النقطة هـ داخل دائرة فإن:

$\overline{\text{أ هـ}} \times \overline{\text{هـ ب}} = \overline{\text{جـ هـ}} \times \overline{\text{هـ د}}$

البرهان الرياضي:



المعطى: دائرة مركزها (م)

الوتران $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ يتقاطعان داخل

الدائرة عند النقطة هـ

المطلوب اثباته:

$\overline{\text{أ هـ}} \times \overline{\text{هـ ب}} = \overline{\text{جـ هـ}} \times \overline{\text{هـ د}}$

العمل: صل $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$

البرهان:

في $\triangle$ أ جـ هـ ، $\triangle$ ب د هـ

$\measuredangle$ جـ أ هـ = $\measuredangle$ ب د هـ (نظرية)

$\measuredangle$ أ جـ هـ = $\measuredangle$ هـ ب د (نظرية)

$\measuredangle$ أ هـ جـ = $\measuredangle$ ب هـ د (تقابل بالرأس)

$\therefore$ Δ المثلثان أ جـ هـ ، Δ ب د هـ متشابهان

ومن نظريات تشابه المثلثات:

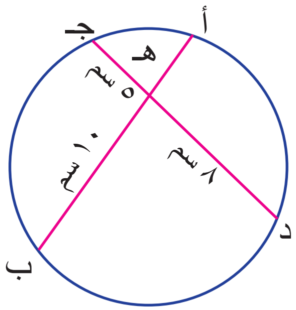
المثلثات المتشابة أضلاعها المتناظرة متناسبة

$\therefore$ $\frac{\overline{\text{أ هـ}}}{\overline{\text{هـ د}}} = \frac{\overline{\text{جـ هـ}}}{\overline{\text{هـ ب}}}$

بالضرب التبادلي:

$\therefore$ $\overline{\text{أ هـ}} \times \overline{\text{هـ ب}} = \overline{\text{جـ هـ}} \times \overline{\text{هـ د}}$

مثال (١):



من الشكل المقابل:

جد طول $\overline{\text{أ هـ}}$

الحل:

$\overline{\text{أ هـ}} \times \overline{\text{هـ ب}} = \overline{\text{جـ هـ}} \times \overline{\text{هـ د}}$

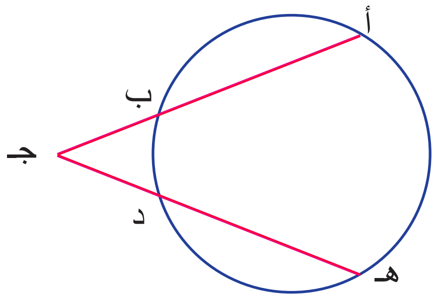
$\overline{\text{أ هـ}} \times ١٠ = ٥ \times ٨$

$\therefore$ $\overline{\text{أ هـ}} = \frac{٤٠}{١٠} =$ ٤سم

النظرية (٨) السابقة صالحة أيضاً

عندما يتقاطع الوتران خارج الدائرة أي أنّ:

$\overline{\text{أ جـ}} \times \overline{\text{ب جـ}} = \overline{\text{هـ جـ}} \times \overline{\text{د جـ}}$



مثال (٢):

في الشكل المقابل:

أ ب ، هـ د وتران يتقاطعان خارج الدائرة

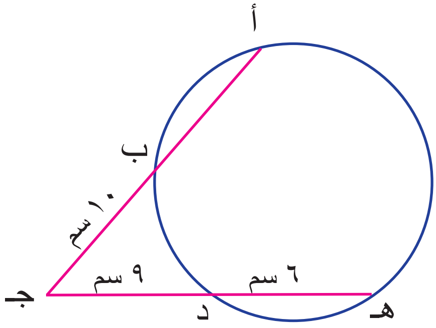
عند جـ

ب جـ = ١٠ سم ، هـ د = ٦ سم

د جـ = ٩سم

جد الأطوال:

١- هـ جـ　　　٢- أ جـ　　　٣- أ ب



الحل:

١/ هـ جـ = ٦ + ٩ = ١٥سم

٢/ أ جـ × ب جـ = هـ جـ × د جـ

أ جـ × ١٠ = ١٥ × ٩

أ جـ = $\frac{١٣٥}{١٠}$ = ١٣,٥سم

٣/ أ ب = أ جـ - ب جـ = ١٣,٥ – ١٠ = ٣,٥سم

تمرين(٦)

١- في الشكل المقابل:

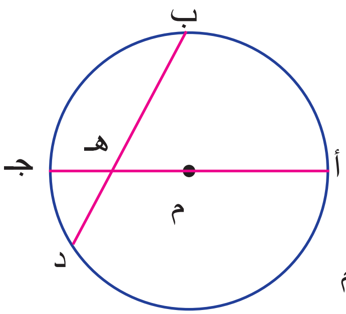
دائرة مركزها (م)

أ جـ قطر

ب هـ = ٦سم ، هـ د = ٤سم ، هـ جـ ٢سم

جد الآتي:

أ. طول أ هـ　　　ب. طول أ م



٢/ في الشكل المقابل:

دائرة فيها ب جـ ، هـ د

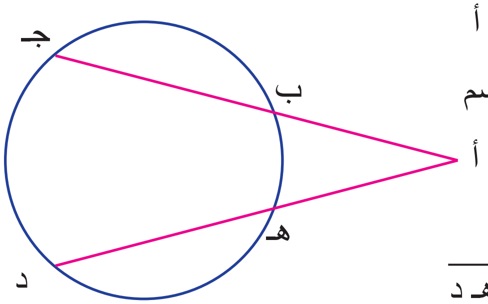
وتران يتقاطعان عند النقطة أ

أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٧ سم

أ هـ = ١٠ سم

جد الأطوال:

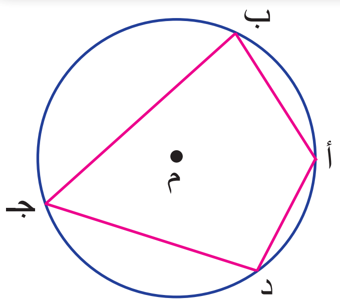
أ. أ د ب. هـ د



(٤-٩) الرباعي الدائري.

مفهوم أساسي

الرباعي الدائري هو شكل رباعي تقع رؤوسه الأربعة على الدائرة (محيط الدائرة)



نشاط (١)

١. ارسم دائرة وحدّد مركزها (م)

٢. ارسم الرباعي الدائري أ ب جـ د عليها

٣. قس الزاويتين المتقابلتين:

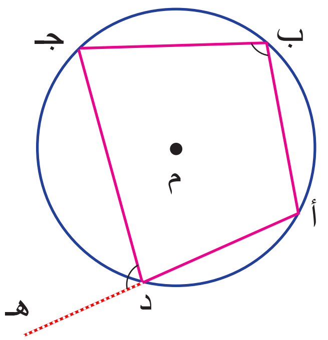
∢ أ ب جـ ، ∢أ د جـ ثم جد حاصل ∢ أ ب جـ + ∢ أ د جـ ماذا تلاحظ؟

٤. قس الزاويتان المتقابلتين ∢ ب أ د ، ∢ ب جـ د ثم جد حاصل ∢ ب أ د + ∢ ب جـ د ماذا تلاحظ؟

مما سبق يمكننا التوصّل إلى:

النظرية (٩) في الرباعي الدائري كل زاويتان متقابلتين متكاملتين

نشاط (٢)



١. ارسم الدائرة م

٢. ارسم الرباعي الدائري أ ب جـ د عليها

٣. مد الوتر $\overline{\text{أ د}}$ إلى هـ

٤. قس ∢أ ب جـ ، ∢جـ د هـ

ثم قارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

٥. كرّر نفس الخطوات السابقة وذلك بمدّ الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$ ، والوتر $\overline{\text{جـ د}}$ وقارن بين الزاوية الخارجية والزاوية الداخلية المقابلة للمجاورة لها في كل حالة. ماذا تلاحظ؟

مما سبق يمكننا التوصّل إلى:

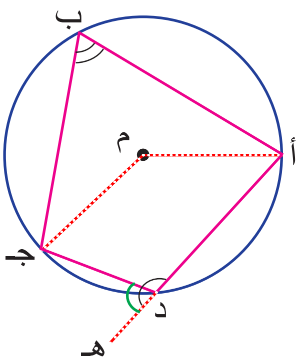
النظرية (١٠)

في الرباعي الدائري الزواية الخارجية تساوي الزواية الداخلية المقابلة للمجاورة لها.

البرهان الرياضي:

المعطى: دائرة مركزها (م)

أب جـ د رباعي دائري



المطلوب اثباته:

١/ ∢ أ ب جـ + ∢ أ د جـ = ١٨٠°

٢/ ∢ أ ب جـ = ∢ جـ د هـ

العمل: صل $\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{جـ م}}$

البرهان: ∢ أ م جـ = ٢ ∢ أ ب جـ (نظرية)

∢ أ م جـ (المنعكسة) = ٢ ∢ أ د جـ (نظرية)

ولكن ∢ أ م جـ + ∢ أ م جـ (المنعكسة) = ٣٦٠°(الزوايا المتجمعة في نقطة واحدة)

∴ ٢ ∢ أ ب جـ + ٢ ∢ أ د جـ = ٣٦٠°

∴ ∢ أ ب جـ + ∢ أ د جـ = ١٨٠° المطلوب أولاً (١)

∢ أ د جـ + ∢ جـ د هـ = ١٨٠° (زاوية مستقيمة) (٢)

من (١) و (٢) ∴ ∢ أ ب جـ + ∢ أ د جـ = ∢ أ د جـ + ∢ جـ د هـ

∴ ∢ أ ب جـ = ∢ جـ د هـ المطلوب ثانياً

ومما سبق يمكننا التوصل إلى النتيجة التالية:

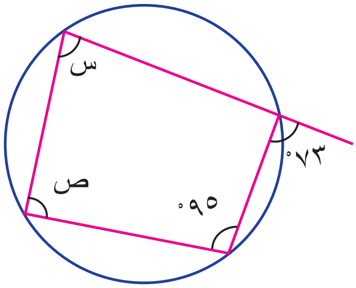
نتيجة:

إذا كان مجموع الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي = ١٨٠° كان الشكل رباعياً دائرياً.

مثال:

من الشكل المقابل:

جد قيم الزوايا المشار إليها بالحروف .



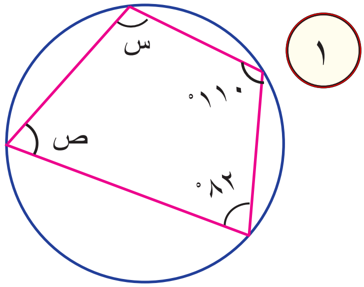
س + ٩٥ = ١٨٠°

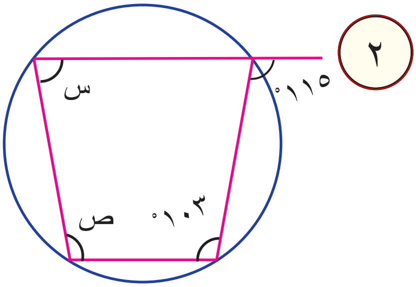
∴ س = ٨٥°

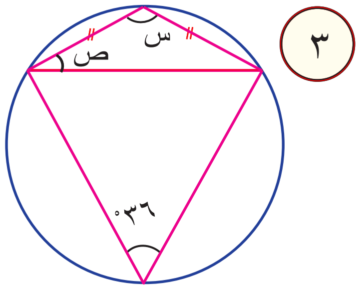
ص = ٧٣°

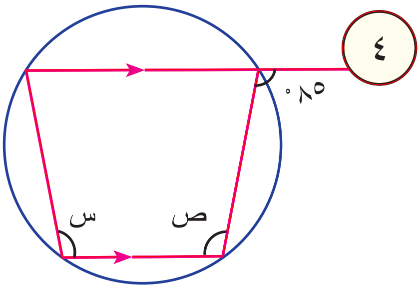
تمرين(٧)

أ/ جد قيم الزوايا المشار إليها بالحروف في الأشكال التالية:









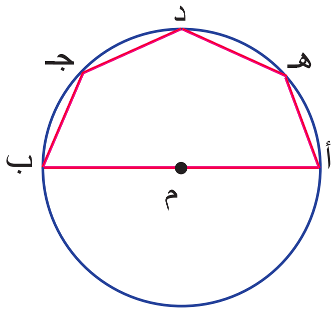
ب/ في الشكل المقابل دائرة مركزها (م)

أ ب جـ د هـ خماسي

اثبت أنّ:

∢ أ هـ د + ∢ ب جـ د = ٢٧٠°

(ارشاد صل $\overline{\text{ب هـ}}$)



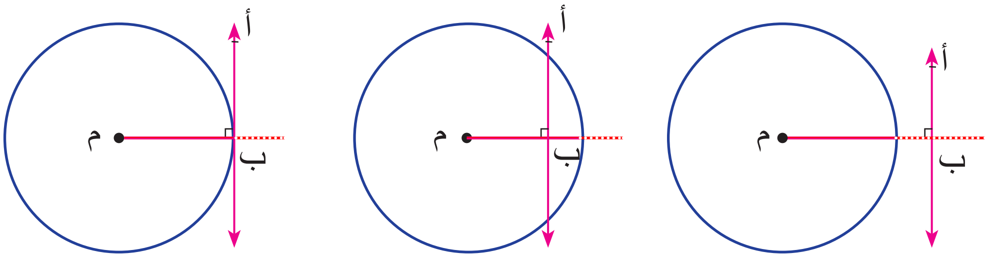
(٤-١٠) مماس الدائرة

نشاط:

١- ارسم دائرة وحدّد مركزها (م)

٢- ارسم نصف قطر للدائرة (م) ثم مدّه خارج الدائرة.

٣- ارسم المستقيم أ ب بحيث يكون عمودياً على نصف القطر.



الشكل (١) الشكل (٢) الشكل (٣)

- في الشكل (١) المستقيم أ ب يقع خارج الدائرة (م) لأن م ب > نق
- في الشكل (٢) المستقيم أ ب قاطع للدائرة (م) لأن م ب < نق
- في الشكل (٣) المستقيم أ ب مماس للدائرة (م) لأن م ب = نق

مفهوم أساسي

المماس هو المستقيم الذي يمس الدائرة في نقطة واحدة وتسمى نقطة التماس، ويكون البعد بين نقطة التماس ومركز الدائرة = نق

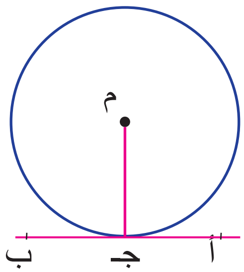
مما سبق يمكننا القول أنّ:

النظرية (١١)

المستقيم الذي يرسم عمودياً على نصف قطر الدائرة في نهايته ، يمس الدائرة في نقطة واحدة.

(٤ــ١١) النظرية (١٢):

نشاط:



١. ارسم دائرة وحدّد مركزها (م)

٢. ارسم المماس $\overline{\text{أ ب}}$ يمس الدائرة (م) عند (جـ)

٣. ارسم نصف القطر $\overline{\text{م جـ}}$

٤. قس ∢ أ جـ م . كم مقدارها؟

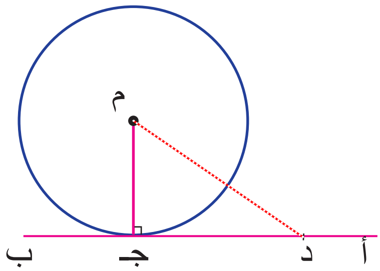
٥. كرر نفس النشاط على مجموعة من الدوائر. ماذا تلاحظ؟

مما سبق يمكننا القول أنّ:

نظرية (١٢)

الزاوية المحصورة بين المماس ونصف قطر الدائرة الذي يمر بنقطة التماس زاوية قائمة

البرهان الرياضي:



المعطى: دائرة مركزها (م)

$\overline{\text{م جـ}}$ نصف قطر

$\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة في (جـ)

المطلوب اثباته: $\overline{\text{م جـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ ب}}$ في (جـ)

العمل: خذ أي نقطة مثل د على $\overline{\text{أ ب}}$ ، ثم صل $\overline{\text{م د}}$

البرهان:

بما أنّ: $\overline{\text{أ ب}}$ يمس الدائرة في جـ

∴ كل النقاط على المماس باستثناء جـ تقع خارج الدائرة (م)

∴ د تقع خارج الدائرة.

∴ $\overline{\text{م د}}$ أكبر من نصف القطر $\overline{\text{م جـ}}$

أي أنّ $\overline{\text{م جـ}}$ أصغر من $\overline{\text{م د}}$

وبالمثل يمكن اثبات أنّ:

$\overline{\text{م جـ}}$ أصغر من أي مستقيم واصل من المركز إلى أي نقطة على $\overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{م جـ}}$ أقصر المستقيمات من م إلى $\overline{\text{أ ب}}$

درست سابقاً في نظريات التباين أنّ:

أقصر قطعة مستقيمة من نقطة معينة إلى مستقيم هو العمود النازل من النقطة على المستقيم

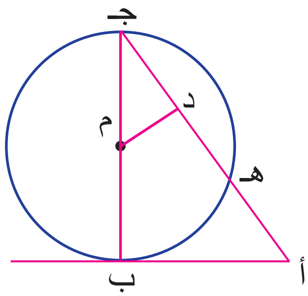
∴ $\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

ومما سبق يمكننا التوصل إلى النتائج التالية:

١. من أي نقطة على محيط الدائرة لايمكن رسم أكثر من مماس واحد لتلك الدائرة.

٢. العمود المقام على مماس الدائرة من نقطة التماس يمر بمركز الدائرة.

مثال:



في الشكل المقابل:

دائرة مركزها (م)

$\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند ب

$\overline{\text{ب جـ}}$ قطر ، د منتصف $\overline{\text{جـ هـ}}$

اثبت أن: الشكل أ ب م د رباعي دائري

الحل:

$\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة (معطى)

$\overline{\text{م ب}}$ نصف قطر (معطى)

∠ أ ب م = ٩٠° (نظرية) (١)

د منتصف $\overline{\text{جـ هـ}}$ (معطى)

$\overline{\text{م د}}$ يمر بمركز الدائرة و منتصف $\overline{\text{جـ هـ}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{م د}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ هـ}}$ (نظرية)

∴ ∢ هـ د م = ٩٠° وهذا يعني أنّ ∢ أ د م = ٩٠° (٢)

من (١) و (٢)

∢ أ ب م + ∢ أ د م = ١٨٠°

و هما متقابلتان

∴ الشكل أ ب م د رباعي دائري

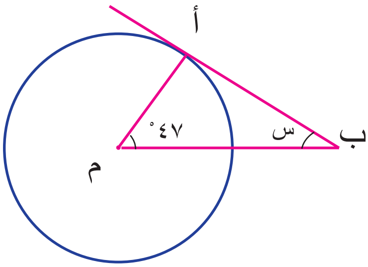
تمرين (٨)

١- في الشكل المقابل:

دائرة مركزها م

$\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م

جد قيمة س



٢- في الشكل أدناه:

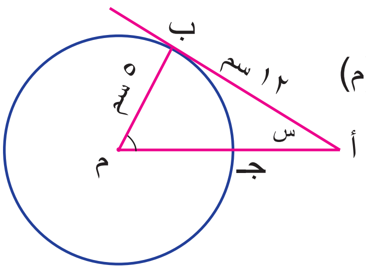
دائرة مركزها م

$\overline{\text{أ ب}}$ مماس لدائرة مركزها (م)

$\overline{\text{أ ب}}$ = ١٢ سم

$\overline{\text{ب م}}$ = ٥ سم

جد: $\overline{\text{أ جـ}}$



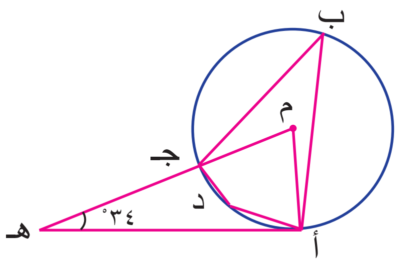
٣- في الشكل المقابل دائرة مركزها (م)

أ هـ مماس للدائرة

∡ أ هـ جـ = ٣٤°

جد:

أ/ ∡ أ ب جـ ب/ ∡ أ د جـ

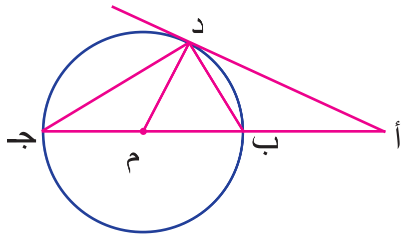


٤- في الشكل المقابل:

دائرة مركزها م

أ د مماس للدائرة اثبت أنّ :

∡ أ د ب = ∡ م د جـ



٥- في الشكل أدناه:

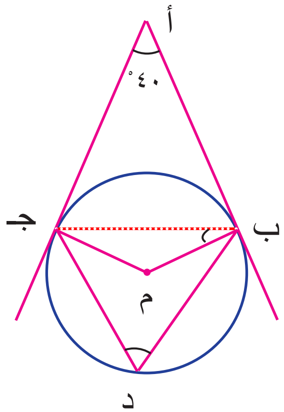
دائرة مركزها م

أ ب ، أ جـ مماسان للدائرة م

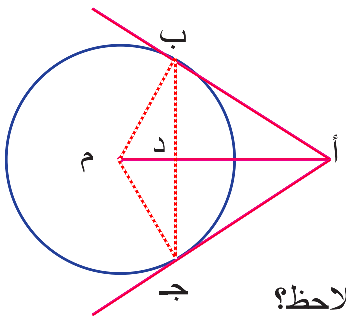
جد:

أ/ ∡ ب د جـ

ب/ ∡ م ب جـ



(٤-١٢) النظرية (١٣)



نشاط:

١. ارسم دائرة وحدّد مركزها (م)

٢. ارسم المماسين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ للدائرة م

٣. قس المماسين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ثم قارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أنّ: $\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{أ جـ}}$

٤. ارسم مستقيم من مركز الدائرة م إلى أ (نقطة تقاطع المماسين).

٥. قس∢ب أ م ، ∢ جـ أ م ثم قارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أنّ: ∢ب أ م = ∢ جـ أ م

٦. صل $\overline{\text{ب م}}$ ، $\overline{\text{جـ م}}$

٧. قس∢ أ م ب ، ∢ أ م جـ ثم قارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أنّ: ∢أ م ب = ∢أ م جـ

٨. صّل نقطتي التماس ب ، جـ ليقطع $\overline{\text{أ م}}$ عند د

٩. قس ∢ أ د ب. ما مقدارها؟

نلاحظ أنّ: ∢أ د ب = ٩٠°

١٠. قس $\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ ثم قارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أنّ: $\overline{\text{ب د}}$ = $\overline{\text{جـ د}}$

مما سبق يمكننا التوصّل إلى النظرية التالية:

نظرية (١٣)

إذا رسم مماسان للدائرة من نقطة خارجها فإنّ:

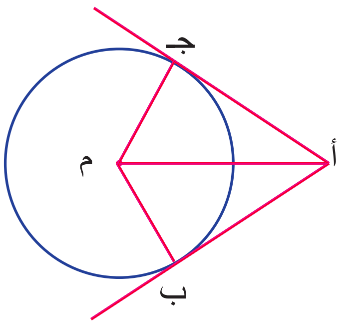
١. المماسان متساويان.

٢. المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلى نقطة تقاطع المماسين ينصف الزاوية المحصورة بينهما.

٣. المماسان يقابلان زاويتين متساويتين عند مركز الدائرة.

٤. المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلى نقطة تقاطع المماسين يكون عمودياً على الوتر الواصل بين نقطتي التماس وينصّفه.

البرهان الرياضي:



المعطى: دائرة مركزها م

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ

المطلوب اثباته:

١. $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{أ جـ}}$

٢. $\measuredangle$ ب أ م $= \measuredangle$ جـ أ م

٣. $\measuredangle$ أ م ب $= \measuredangle$ أ م جـ

البرهان:

في Δ أ ب م ، Δ أ جـ م

$\overline{\text{ب م}} = \overline{\text{جـ م}}$ (نصفا قطرين)

$\overline{\text{أ م}} = \overline{\text{أ م}}$ (مشترك)

$\measuredangle$ أ ب م $= \measuredangle$ أ جـ م (نظرية)

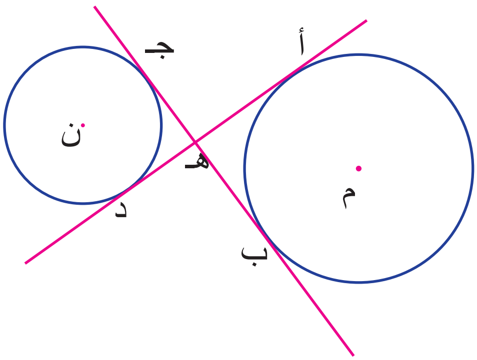
∴ المثلثان متطابقان (ض، و ، ق)

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ = $\overline{\text{أ جـ}}$ (١)

∴ ∡ب أ م = ∡جـ أ م (٢)

∴ ∡أ م ب = ∡أ م جـ (٣)

مثال:



في الشكل المقابل:

$\overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ مماسان للدائرتين م ، ن

يتقاطعان في هـ

اثبت أنّ: $\overline{\text{أ د}}$ = $\overline{\text{ب جـ}}$

الحل:

في الدائرة م:

$\overline{\text{أ هـ}}$ = $\overline{\text{ب هـ}}$ (نظرية) (١)

في الدائرة ن:

$\overline{\text{هـ د}}$ = $\overline{\text{هـ جـ}}$ (نظرية) (٢)

بجمع (١) ، (٢)

$\overline{\text{أ هـ}}$ + $\overline{\text{هـ د}}$ = $\overline{\text{ب هـ}}$ + $\overline{\text{هـ جـ}}$

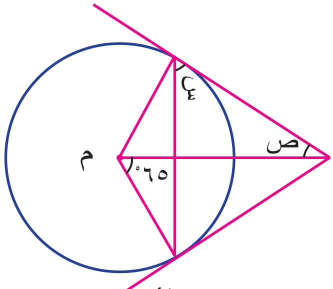
ولكن $\overline{\text{أ هـ}}$ + $\overline{\text{هـ د}}$ = $\overline{\text{أ د}}$

$\overline{\text{ب هـ}}$ + $\overline{\text{هـ جـ}}$ = $\overline{\text{ب جـ}}$

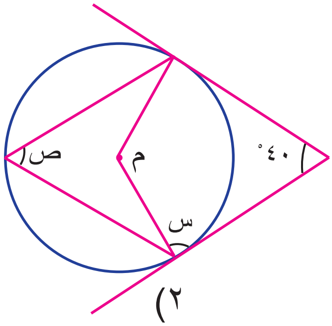
∴ $\overline{\text{أ د}}$ = $\overline{\text{ب جـ}}$

تمرين (٩)

أ. جد قيم الزوايا المشار إليها بالحروف في الأشكال التالية:

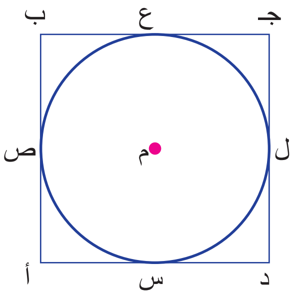


١)



٢)

ب. في الشكل المقابل:



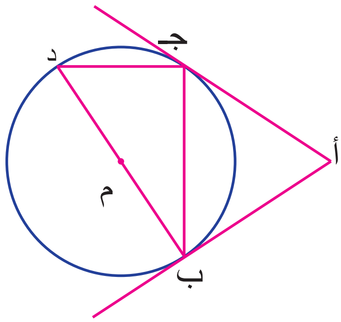
س ، ص، ع ، ل نقاط على الدائرة (م)

رُسمت للدائرة مماسات عندها فتقاطعت

عند النقاط أ، ب، جـ ، د اثبت أنّ:

$\overline{\text{أ ب}} + \overline{\text{جـ د}} = \overline{\text{د أ}} + \overline{\text{جـ ب}}$

جـ. في الشكل المقابل:



دائرة مركزها م

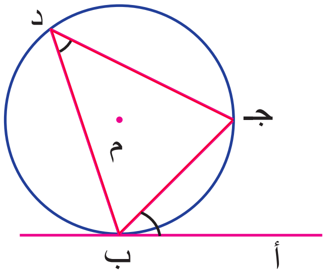
$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ مماسان للدائرة (م)

اثبت أنّ:

∢ أ ب جـ = ∢ ب د جـ

د. دائرة نصف قطرها ٦ سم ، على أي بعد من مركزها يمكن وضع نقطة بحيث يكون طول كل من المماسين المرسومين للدائرة يساوي ١٠ سم؟

(٤-١٣) النظرية (١٤):



نشاط:

١. ارسم دائرة مركزها (م)

٢. ارسم المماس $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث يمس الدائرة م عند ب

٣. ارسم الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$ للدائرة (م) بحيث يمر بنقطة التماس ب

٤. ارسم الزاوية المحيطية ∢ جـ د ب على الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$

٥. قس ∢ أ ب جـ ، ∢ جـ د ب ثم قارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

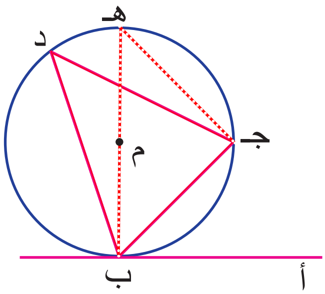
إذا كان رسمك دقيقاً ستجد أن ∢ أ ب جـ = ∢ جـ د ب

مما سبق يمكننا التوصّل إلى:

نظرية (١٤)

الزاوية المحصورة بين المماس لدائرة والوتر المار بنقطة التماس تساوي الزاوية المحيطية المقابلة لهذا الوتر من الجهة الأخرى

البرهان الرياضي:



المعطى: دائرة مركزها (م) فيها:

$\overline{\text{أ ب}}$ مماس عند النقطة ب

$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر

المطلوب اثباته:

∢ أ ب جـ = ∢ جـ د ب

العمل: صل $\overline{\text{ب م}}$ ثم مدّه حتى يلاقي الدائرة في هـ صل $\overline{\text{جـ هـ}}$

البرهان:

∢ ب جـ هـ = ٩٠° (نظرية) (محيطية على قطر الدائرة)

∴ ∢ جـ ب هـ + ∢ جـ هـ ب = ٩٠° (١)

∢ أ ب هـ = ٩٠° (نظرية) (محصورة بين مماس ونصف قطر)

∴ ∢ أ ب جـ + ∢ جـ ب هـ = ٩٠° (٢)

من (١) و(٢)

∢ أ ب جـ + ∢ جـ ب هـ = ∢ جـ ب هـ + ∢ جـ هـ ب

بطرح ∢ جـ ب هـ من الطرفين نجد أنّ:

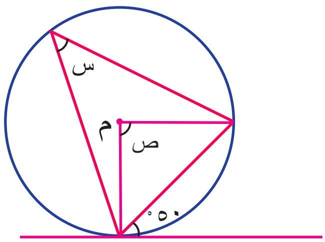
∢ أ ب جـ = ∢ جـ هـ ب

ولكن ∢ جـ هـ ب = ∢ جـ د ب (نظرية) (محيطتان على قوس واحد)

∴ ∢ أ ب جـ = ∢ جـ د ب

مثال:

جد قيم الزوايا المشار اليها بالحروف: (م مركز الدائرة)



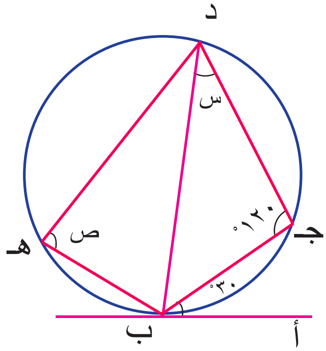
الحل :

س = ٥٠

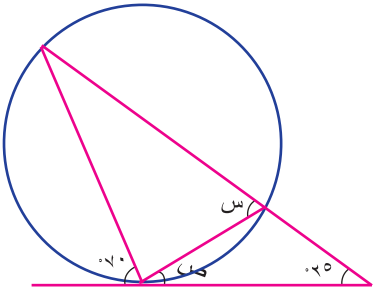
ص = ٢ × س = ٢ × ٥٠ = ١٠٠

تمرين (١٠)

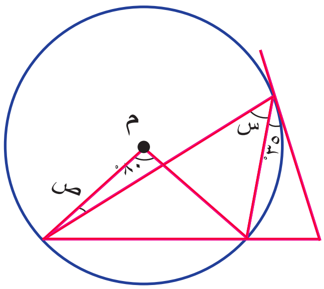
١. جد قيم الزوايا المشار إليها بالحروف في الأشكال التالية (م مركز الدائرة)



أ.



ب.



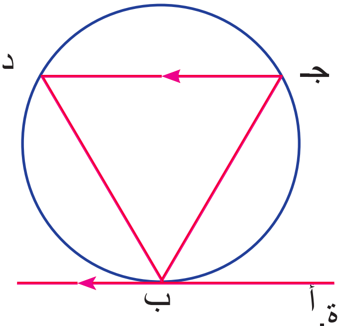
جـ.

٢. من المسألة (١) الفقرة (أ) : وضّح لماذا ب د لا يُمثّل قطر الدائرة.

٣. في الشكل المقابل:

المماس أ ب // الوتر جـ د

اثبت أنّ: ∢ ب جـ د = ∢ ب د جـ



٤. أ ب ، ب جـ ، جـ أ، أوتار متساوية في دائرة.

المماسان في ب، جـ يتلاقيان في هـ ، اثبت أنّ

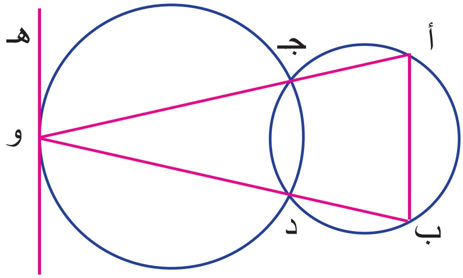
Δ ب جـ هـ متساوي الأضلاع.

٥. في الشكل المقابل دائرتان متقاطعتان في جـ ، د

$\overline{\text{هـ و}}$ مماس في و

اثبت أنّ: $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$

(ارشاد: صل $\overline{\text{جـ د}}$)



الوحدة الخامسة

ضرب وتحليل المقادير الجبرية

تمهيد:

الحد الجبري: الحد الجبري يكون إما ثابتاً أو متغيراً أو حاصل ضرب ثابت في متغير واحد أو أكثر بشرط أن يكون أُس المتغير عدداً صحيحاً غير سالب (ينتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية) . يسمى الثابت معامل الحد أي أن الحد الجبري يتكون من حاصل ضرب عاملين أو أكثر.

مثال:

الحد الجبري	طريقة كتابته	المعامل	المتغير	الدرجة
٤ × س	٤ س	٤	س	الأولى
٧ × ص^{٥}	٧ص^{٥}	٧	ص	الخامسة
٦ × س^{٣}	٦ س^{٣}	٦	س	الثالثة
٣ × س^{٢} × س^{٤}	٣ س^{٦}	٣	س	السادسة
٥ × أ^{٦} × أ^{٣} × أ	٥ أ^{١٠}	٥	أ	العاشرة

تحقق من فهمك:

المطلوب: طريقة الكتابة، المعامل ، المتغير، الدرجة.

أ/ ٧ × س^{٢} ب/ ٧ × س ج/ ٥ × س^{٤}× س^{٢} × س د/ ـ٤ × ص^{٣} × ص^{٤}

نلاحظ:

في الحد الجبري ٩ س^{٥}:

٩ يسمى عامل (عددي)

س تسمى عامل (رمزي أو متغير)

المقدار الجبري:

المقدار الجبري يتكون من حد جبري أو أكثر يفصل بينهما علامة + ، -

الحد الجبري	المقدار الجبري
س	أ + ب
٢ س ص	أ ــ ٢
٣ أ ب جـ	٣ أ ب جـ - ٢ س
٥ $س^{٢}$	٥ $س^{٢}$ ــ ٢ س + ٨
٢ س	س + س
٢ $س^{٢}ص^{٣}$ ع	٢ $س^{٢}ص^{٣}$ ع + س ص

تحقق من فهمك:

أ) المقدار الجبري ٣ $س^{٢}$ ــ ٢س + ٥ ؟

١ ـ كم عدد حدوده؟

٢ـ ما الحد الأول والثاني والثالث؟

٣ـ ما درجة الحد الأول ودرجة الحد الثاني ودرجة الحد الثالث؟

٤ـ ما درجة المقدار الجبري؟

٥ـ هل الحد الأول والحد الثاني متشابهان؟

٦ـ ماذا نسمي الحد الثالث؟

ب) هل يمكن جمع وطرح ٥ $س^{٣}$ ، ٢ $س^{٣}$ ولماذا؟ وإن كانت إجابتك بنعم أوجد ناتج الجمع والطرح.

جـ) هل يمكن جمع وطرح ٢ $س^{٤}$ ، ٦ $س^{٢}$ ولماذا؟ وإن كانت إجابتك بنعم أوجد ناتج الجمع والطرح.

تمرين مراجعة

أ) جد مفكوك (ناتج الضرب) مستعيناً بالخاصية التوزيعية والأسس:

١/ ٣(س + ٥)

٢/ ٢ س (س + ٥ ص)

٣/ ٢ س^{٢} (س^{٣} – ٧)

٤/ ٣ س (س + ٥ ص)

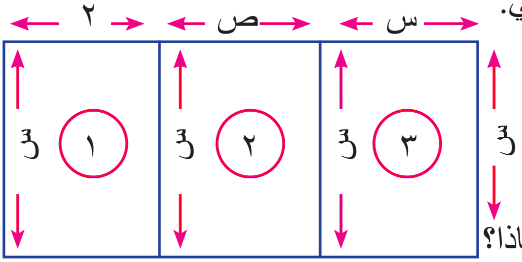
٥/ (س – ص) ص

ب) جد مساحة مستطيل طوله (س + ٢ ص) وحدة وعرضه ص وحدة .

(٥- ١) ضرب المقادير الجبرية

نشاط (١):

الشكل أدناه عبارة عن لوحة للإعلانات المضيئة، يراد تغطيتها بلوح زجاجي مكون من ثلاثة قطع، فما مساحة هذا اللوح الزجاجي:



عرض اللوحة = س وحدة

طول اللوحة = س + ص + ٢ لماذا؟

مساحة اللوحة = س (س + ص + ٢) لماذا؟

= (س + ص + ٢) س لماذا؟

هل مساحة اللوحة تساوي مجموع مساحات القطع الثلاثة تأكد من ذلك؟

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي : عند ضرب حد جبري في مقدار جبري نستخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع

التعبير الرمزي: أ (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ = أ ب + أ جـ

أمثلة : س (س + ٢ س ص + ع) = س × س + س × ٢ س ص + س × ع

= س^{٢} + ٢ س^{٢} ص + س ع

ص (ع + د) = ص × ع + ص × د= ص ع + ص د

أمثلة: اضرب

١/ ٤ (س – ١)

٢/ س (٣ – ص)

٣/ ٥ ص (٢ + ٣ س – ٥ ص^{٢}) + ص (٥ – ٣ ص + ٤ س ص)

الحل:

١/ ٤ (س – ١) = ٤ × س – ٤ × ١ = ٤ س – ٤

٢/ س (٣ – ص) = س × ٣ – س × ص = ٣ س – س ص

٣/ ٥ ص (٢ + ٣ س – ٥ ص^{٢}) + ص (٥ – ٣ ص + ٤ س ص)

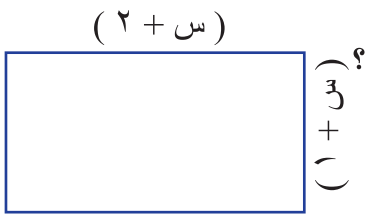
٥ ص × ٢ + ٥ ص × ٣ س – ٥ ص × ٥ ص^{٢} + ص × ٥ – ص × ٣ ص
+ ص ×٤ س ص

= ١٠ ص +١٥ س ص – ٢٥ ص^{٣} + ٥ ص – ٣ ص^{٢} + ٤ س ص^{٢}

= ١٥ ص + ١٥ س ص – ٢٥ ص^{٣} + ٤ س ص^{٢} – ٣ ص^{٢}

نشاط (٢):

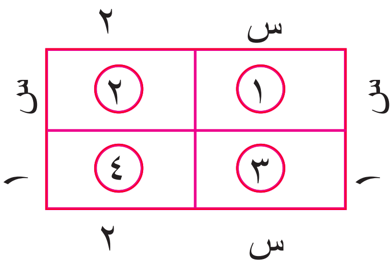
١/ الشكل يوضح مستطيل طوله (س + ٢) وحدة ،عرضه (س + ١) وحدة



مساحة المستطيل = (س + ٢) (س + ١) لماذا؟

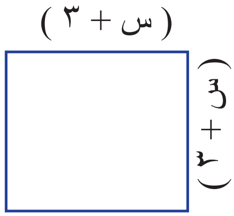
مساحة المستطيل = س^{٢} + ٣ س + ٢ لماذا؟

هل مساحة المستطيل تساوي مجموع مساحات القطع الأربعة تأكد من ذلك؟



نشاط (٣):

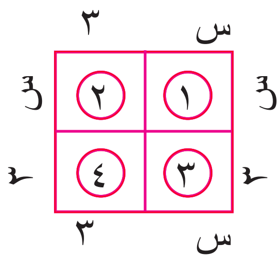
٢) الشكل يوضح مربع ضلعه (س + ٣) وحدة



مساحة المربع = (س + ٣) (س + ٣) لماذا؟

مساحة المربع = س^{٢} + ٦ س + ٩ لماذا؟

هل مساحة المربع تساوي مجموع مساحات القطع الأربعة تأكد من ذلك؟



مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: عند ضرب مقدار جبري في مقدار جبري نستخدم الخاصية التوزيعية

التعبير الرمزي: (أ + ب) (جـ + د) = أ(جـ + د) + ب (جـ + د)

= أ × جـ + أ × د + ب × جـ + ب × د

= أ جـ + أ د + ب جـ + ب د

مثال:

(س + ٢) (س + ٣) = س (س + ٣) + ٢ (س + ٣)

= س × س + س × ٣ + ٢ × س + ٢ × ٣

= س^{٢} + ٣ س + ٢ س + ٦

= س^{٢} + ٥ س + ٦

مثال (١):

جد ناتج الضرب

١/ (أ + ب) (س + ص)

٢/ (أ + ب) (س – ص)

٣/ (أ – ب) (س + ص)

٤/ (أ – ب) (س – ص)

الحل:

١) (أ + ب) (س + ص) = أ (س + ص) + ب (س +ص)

= أ × س + أ × ص + ب× س + ب × ص

= أ س + أ ص+ ب س + ب ص

٢) (أ + ب) (س – ص) = أ (س - ص) + ب (س– ص)

= أ × س – أ × ص + ب× س - ب × ص

= أ س – أ ص+ ب س – ب ص

٣) (أ – ب) (س + ص) = أ (س+ص) – ب (س + ص)

= أ× س + أ × ص – ب × س – ب × ص

= أ س + أ ص – ب س – ب ص

٤) (أ – ب) (س – ص) = أ (س – ص) – ب (س – ص)

= أ × س – أ × ص – ب × س + ب × ص

= أ س – أ ص – ب س + ب ص

مثال (٢):

جد ناتج الضرب

أ) ٣ (س^{٢} + ١) + س (٥ س – ١)

ب) (٢ س + ٣ ص) (٣ س + ٢ ص)

جـ) (٢ س + ٥)^{٢}

الحل

أ/ ٣ (س^{٢} + ١) + س (٥ س – ١) = ٣ × س^{٢} +٣ × ١ + س × ٥ س – س × ١

= ٣ س^{٢} + ٣ + ٥ س^{٢} – س

= ٨ س^{٢} – س + ٣

ب/ (٢ س + ٣ ص) (٣ س + ٢ ص) = ٦ س^{٢} + ٤ س ص + ٩ س ص + ٦ ص^{٢}

= ٦ س^{٢} + ١٣ س ص + ٦ ص^{٢}

جـ/ (٢ س + ٥)^{٢} = (٢ س + ٥) (٢ س + ٥)

= ٢ س (٢ س + ٥) + ٥ (٢ س + ٥)

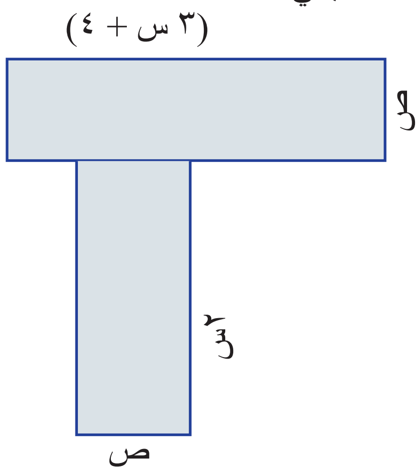
= ٢ س × ٢ س + ٢ س × ٥ + ٥ × ٢ س + ٥ × ٥

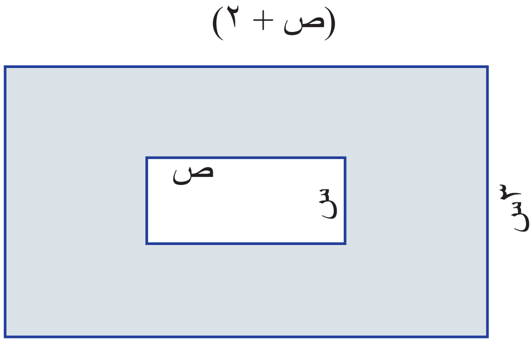
= ٤ س^{٢} + ١٠ س + ١٠ س + ٢٥

= ٤ س^{٢} + ٢٠ س + ٢٥

تمرين (١)

(١) اكتب التعبير الجبري الذي يمثل مساحة المنطقة المظللة بأبسط صورة في كل مما يأتي:





(٢) جد ناتج ما يأتي في أبسط صورة:

أ/ ص (٢ س + ٣) + ص × ٢ س

ب/ (س + ٢) (س + ٣)

جـ/ (٣ س + ص)٢

د/ (٢ س – ٣ ص)٢

(٣) اكتب ناتج ضرب المقدار (٣ س + ٢) (٣ س – ٤) ثم أوجد قيمة ناتج الضرب عند س = ٤

(٤) جد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

أ/ (أ + ب) (س + ص + أ)

ب/ (س + ص − ٣)(٢ س + ٣ ص − ٥)

جـ/ (س + ٣) (س −١) (س +١) +(س^{٢}+ ٢ س − ١)

(٥-٢): تحليل المقدار الجبري

تحليل المقدار الجبري يعني وضع المقدار الجبري في صورة عوامل مضروبة في بعضها بشرط أن يكون معامل كل متغير عدداً صحيحاً.

مثلاً عند تحليل العدد ١٢ نجد أن

١٢ = ١ × ١٢ ، ٢ × ٦ ، ٣ × ٤

عوامل العدد ١٢ هي ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢

نلاحظ أن طريقة تحليل المقادير الجبرية هي نفس طريقة تحليل الأعداد الصحيحة.

مثال:

س هي أحد عوامل المقدار الجبري س^{٢} + ٣ س وذلك لأن س (س + ٣) = س × س + س × ٣

= س^{٢} + ٣ س

وبالتالي نكون قد حللنا س^{٢} + ٣ س إلي عاملين هما س ، (س + ٣)

تحقق من فهمك :

١. هل س عامل من عوامل المقدار الجبري س ص + س ع ؟ ولماذا ؟

٢. المقدار أ + ب لا يحلل لماذا ؟

٣. المقدار الجبري ٢ $س^٢$ + ٨ يحلل تحليلاً كاملاً لماذا؟

٤. المقدار الجبري ٢$س^٢$ + ٨ إذا كتب بالصورة ٨ ($\frac{١}{٤}$ $س^٢$ + ١) لا يكون حلل تحليلاً كاملاً لماذا؟

تمرين (٢)

بيّن ما إذا كانت المقادير الجبرية التالية محللة تحليلاً كاملاً أم لا:

١/ $ص^٢$ + س ص = ص (ص + س)

٢/ ٢ $س^٢$ + ٤ س = ٢ س (س + ٢)

٣/ ٢ $س^٢$ + ٤ س= ٢ ($س^٢$ + ٢ س)

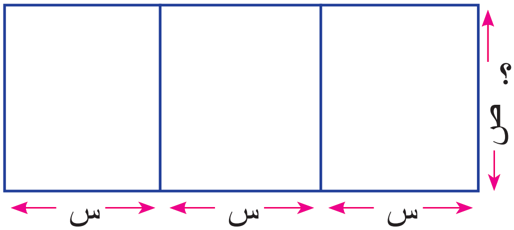
٤/ ٢ $س^٢$ + ٤ س= ٤ س ($\frac{١}{٢}$ س + ١)

٥/ ٣ س + ٦ = ٣ (س + ٢)

٦/ ٣ س + ٦ = ٦ ($\frac{١}{٢}$ $س^٢$ + ١)

(٥-٣) : التحليل باستخراج العامل المشترك

الشكل أدناه يوضح مساحة مزرعة مستطيلة ، مساحتها بالمتر المـــــــــــــــربع (٣ س^{٢} + ٩ س) قسمت إلي ثلاثة أجزاء مستطيلة الشكل و متساوية المساحة



طول المزرعة = ٣ س متر لماذا؟

عرض المزرعة = ص متر

مساحة المزرعة = ٣ س× ص متر مربع .

عرض المزرعة = ص = س + ٣ وضح السبب؟

توضيح: بما أن

٣ س^{٢} + ٩ س = $\boxed{\text{٣}}$ × $\boxed{\text{س}}$ × س + ٣ × $\boxed{\text{٣}}$ × $\boxed{\text{س}}$

بأخذ العوامل المشتركة

∴ ٣ س^{٢} + ٩ س = ٣ س (س + ٣)

بما أنّ مساحة المزرعة = الطول ×العرض

بما أن طول المزرعة = ٣ س

وعرض المزرعة = ص

∴ ٣ س (س + ٣) = ٣ س× ص

∴ ص = س + ٣

مثال (١):

حلل المقادير الجبرية الآتية تحليلاً كاملاً:

أ) ٦ س + ١٨ س^{٢}

١٨ س^{٢} = ٣ × ٦ س × س

٦ س + ١٨ س^{٢} = $\boxed{\text{٦ س}}$ + ٣ × $\boxed{\text{٦ س}}$ × س = ٦ س (١ + ٣ س)

ما القاسم المشترك الأكبر بين ٦، ١٨

ب) ١٦ أ س + ١٤ س^{٢} ص = ٨ × $\boxed{\text{٢}}$ × أ × $\boxed{\text{س}}$ + ٧ × $\boxed{\text{٢}}$ × $\boxed{\text{س}}$ × س × ص

= ٢ س (٨ أ + ٧ س ص) .

جـ) إذا كان ٥ س^{٢} + ١٠ س = ٥ س × ص فإن ص = س +٢ وضّح.

مثال (٢):

حلل المقادير الجبرية الآتية تحليلاً كاملاً وبين عدد العوامل:

أ. ٣ د – ٣

ب. ٣ أ ب + ٦ أ ج

ج. ص – س ص + ص^{٢}

د. ٥ أ^{٢} هـ + ١٠ أ هـ^{٢} د – ١٥ أ^{٣} هـ^{٣} د^{٢}

الحل:

أ- ٣ د – ٣ = ٣ (د – ١) عاملين هما ٣ ، د – ١

ب- ٣ أ ب + ٦ أ جـ = ٣ أ(ب + ٢ جـ) ثلاثة عوامل ٣ ، أ ، (ب + ٢جـ)

ج- ص – س ص + ص^{٢} = ص (١ – س + ص) عاملين هما ص ، (١ – س + ص)

د- ٥ أ^{٢} هـ + ١٠ أ هـ^{٢} د – ١٥ أ^{٣} هـ^{٣} د^{٢} = ٥ أ هـ (أ + ٢ هـ د – ٣ أ^{٢} هـ^{٢} د^{٢}) أربعة عوامل هي

٥ ، أ ، هـ ، (أ + ٢هـ د – ٣ أ^{٢} هـ^{٢} د^{٢})

تمرين(٣):

١/ قم بتحليل المقدار الجبري ٤ س^{٢} + ١٢ س ص + ٦ س

ثم بيّن أي الصور أدناه تحليل كامل وأيها تحليل غير كامل ولماذا؟

أ. ٤ س (س + ٣ ص) + ٦ س

ب. ٤ س^{٢} + ٦ س (٢ ص + ١)

ج. ٢ (٢ س٢ + ٦ س ص + ٣ س)

د. ٢ س (٢ س + ٦ ص + ٣)

هـ. ٦ س ($\frac{٢}{٣}$ س + ٢ ص + ١)

٢/ حلل المقادير الجبرية الآتية تحليلاً كاملاً وبين عدد العوامل في كل حالة:

أ- هـ – م هـ

ب- ص^{٢} - ٨ ص

ج- أ^{٢} + ٦ أ ب

د- ٤ س^{٢} + ١٢ س

هـ. ٤ أ ب^{٢} – ٤ ب – ٢

و. ٦ أ ب – ٢ ب^{٢} + ٦ ب س

ز. – ٥ س ص – ٤٠ ص^{٢}

(٤-٥): العلاقة بين المقدار الجبري (س - ص) والمقدار الجبري(ص - س) :

معلوم أن النظير الجمعي للعدد ٩ هو – ٩ وذلك لأن ٩ + (– ٩) = صفر، وأيضاً النظير الجمعي للعدد س هو – س وذلك لأن س + (- س) = صفر

النظير الجمعي للمقدار الجبري (س – ص) هو – (س – ص)

وذلك لأن (س – ص) + [–(س – ص)] = (س – ص) + (ص – س) = صفر

∴ س – ص = – (ص – س)

أمثلة:

١/ (٧ – ٤) = – (٤ – ٧)

٢/ (س – ١) = – (١ – س)

٣/ (س – ٣) = – (٣ – س)

٤/ (٧ – هـ) = – (هـ – ٧)

تحقق من فهمك:

١/ $\frac{\text{س – ص}}{\text{ص – س}}$ = –١ لماذا؟

٢/ ٩ – ٧ = – (–٢) لماذا؟

تمرين(٤):

اكمل الآتي :

١/ (س – ١) = – (□ – □)

٢/ س – ص = – (□ □ □)

٣/ □ – □ = – (أ – ب)

٤/ س – □ = □ (٧ □ □)

٥/ □ – ص = – (□ □ ٣)

(٥- ٥): العلاقة بين المقدار الجبري (س – ص) والمقدار الجبري (ص – س) واستخراج العامل المشترك:

مثال: حلل المقادير الجبرية الآتية:

١/ ٢ (س + ٣) + ص (س + ٣)

٢/ ٣ (أ + ٢) + ب (٢ + أ)

٣/ ٧ (س – ص) + (ص – س)

٤/ (س + ٢) + (ص + ٣) (س + ٢)

الحل:

١/ ٢ (س + ٣) + ص (س + ٣) = (س + ٣) (٢ + ص) لماذا؟

٢/ ٣ (أ + ٢) + ب (٢ + أ) = (أ + ٢) (٣ + ب) هل أ + ٢ = ٢ + أ ؟

٣/ ٧ (س – ص) + (ص – س) = ٧ (س – ص) + [– (س – ص)]

= ٧ (س – ص) – (س – ص) لماذا؟

= (س – ص) (٧ – ١) .

= ٦ (س – ص)

٤/ (س + ٢) + (ص + ٣) (س + ٢) = (س + ٢) [١ + (ص + ٣)]

= (س + ٢) (ص + ٤) كم عدد العوامل؟

تمرين (٥)

حلل المقادير الجبرية الآتية تحليلاً كاملاً :

١/ ص(س + ٥) + ٣(٥ + س)

٢/ ٦ (٢ + ص) – س(ص + ٢)

٣/ هـ (أ - ب) + (ب – أ)

٤/ (س - ٣) – ص (٣ – س)

٥/ ٣ (س – ص) + ع (ص – س)

٦/ (ص + ٥) + (س + ٧) (ص + ٥)

(٥-٦) : التحليل بواسطة التجميع :

ماذا نلاحظ في هذا المقدار الجبري س^{٢} + أ س + ب س + أ ب؟

نلاحظ ليس للمقدار الجبري عامل مشترك لجميع حدوده وأيضاً نلاحظ أن المقدار الجبري مكون من أربعة حدود.

هل يوجد عامل مشترك بين حدي المقدار أ س + ب س؟ ما العامل المشترك .

هل يوجد عامل مشترك بين حدي المقدار أ س + أ ب؟ ما العامل المشترك.

هل يوجد عامل مشترك بين حدي المقدار س^{٢} + أ س؟ ما العامل المشترك.

لتحليل المقدار الجبري س^{٢} + أ س + ب س + أ ب نقوم بتجميع كل حدين منه بحيث نحصل على عامل مشترك

∴ س^{٢} + أ س + ب س + أ ب = (س^{٢} + أ س) + (ب س + أ ب)

= س (س + أ) + ب (س + أ)

= (س + أ) (س + ب)

هذا النوع من التحليل يسمى التحليل بواسطة التجميع .

هل هنـاك تجميع آخر لتحليل المقدار الجبري س^{٢} + أ س + ب س + أ ب ؟ ما هو؟

مثال (١) :

حلل المقدار الجبري س^{٣} + س^{٢} + س + ١

الحل :

س^{٣} + س^{٢} + س + ١ = (س^{٣} + س^{٢}) +(س + ١)

= س^{٢} (س + ١) + (س + ١)

= (س + ١) (س^{٢} + ١)

حل آخر:

$س^3 + س^2 + س + 1 = (س^3 + س) + (س^2 + 1)$

$= س (س^2 + 1) + (س^2 + 1)$

$= (س^2 + 1) (س + 1)$

مثال (٢) :

حلل المقدار أ س – أ ص + ب س – ب ص

الحل :

أ س – أ ص + ب س – ب ص = (أ س – أ ص) +(ب س – ب ص)

= أ (س – ص) + ب (س – ص)

= (س – ص) (أ + ب)

مثال (٣):

حلل المقدار ٦ $س^2$ – ٩ أ س – ٤ ب س + ٦ أ ب

الحل:

٦ $س^2$ – ٩ أ س – ٤ ب س + ٦ أ ب = (٦ $س^2$ – ٩ أ س) – (٤ ب س – ٦ أ ب)

= ٣ س (٢ س – ٣ أ) – ٢ب (٢ س – ٣ أ)

= (٢ س – ٣ أ) (٣ س – ٢ب)

تمرين (٦)

حلل المقادير الجبرية الآتية تحليلاً كاملاً :

(١) س^{٢} + س ص + ٣ س + ٣ ص

(٢) أ^{٢} + أ جـ – ٥ أ – ٥ جـ

(٣) ٢(س – ص) – هـ (ص – س)

(٤) أ س – أ ص + هـ ص – هـ س

(٥) ٧م – ص م + ن ص – ٧ ن

(٦) أ جـ – ب د – ب جـ + أ د

(٧) أ^{٢} جـ^{٢} + أ^{٢} د^{٢} + ب^{٢} د^{٢} + ب^{٢} جـ^{٢}

(٨) أ س – أ^{٢} + أ د – س د

(٩) أ ب – ١٢س ص + ٣ ب س – ٤ أ ص

(١٠) س^{٢} + ٢ ص - س ص – ٢ س

(٥-٧) : المقدار الجبري من الدرجة الثانية :

درجة المقادير الجبرية ذات المتغير الواحد تسمى بأعلى أُس (قوة) لذلك المتغير

الجدول أدناه يوضح درجة كل مقدار جبري ومعامل كل حد والحد المطلق (الثابت):

المقادير الجبرية	درجة المقدار	معامل س^{٢}	معامل س	الحد المطلق
س^{٢} – ٥ س + ٦	الثانية	١	–٥	٦
٣ س^{٢} + ٢ س – ١	الثانية	٣	٢	–١
س – ٦ س^{٢}	الثانية	–٦	١	صفر
س^{٢} – ٢	الثانية	١	صفر	–٢
س – ٧	الأولى	صفر	١	–٧
س^{٢} + (م + ن) س + م ن	الثانية	١	م + ن	م ن
س^{٢} – (م + ن) س – م ن	الثانية	١	– (م + ن)	– م ن

تمرين (٧)

جد درجة كل من المقادير الجبرية الآتية ، ثم معامل س^{٢} ، ومعامل س ، والحد المطلق:

(١) ٣ س^{٢} – س + ٧

(٢) س^{٢} – ٣

(٣) س – ٤ س^{٢}

(٤) س^{٣} – ٧ س^{٢} – س - ٩

(٥) س^{٢} + (٣ + ٤) س + ٣ × ٤

(٦) س^{٢} – (٢ × ٦) س – ٢ × ٦

(٥-٨) : تحليل المقدار الجبري من الدرجة الثانية إذا كان معامل س^{٢} الواحد الصحيح :

التحليل: هو التحويل إلى حاصل ضرب عاملين أو أكثر

التحليل

رمز	عدد
س^{٢} = س × س	٤ = ١ × ٤
س^{٤} = س^{٢} × س^{٢}	٢ × ٢
أو = س^{٣} × س	٦ = ١ × ٦
س^{٦} = س^{٣} × س^{٣}	٢ × ٣

نلاحظ عند تحليل الأعداد نستصحب جداول الضرب ابتداءً من جدول واحد.

المقدار الثلاثي :

المقدار الثلاثي

البسيط (س^{٢} + ب س + جـ)	غير البسيط (أ س^{٢} + ب س + جـ)
أ = ١	أ ≠ ١، ٠

تحقق من فهمك:

المقدار الجبري س^{٢} + ٣ س + ٢ بسيط لماذا؟

المقدار الجبري ٢ س^{٢} + ٢ س – ١٨٠ غير بسيط لماذا؟

تحليل المقدار الثلاثي البسيط:

المقدار الثلاثي البسيط هو المقدار في الصورة س^{٢} + ب س + جـ

معلوم أن مفكوك (س + ٣) (س + ٢) = س × س + س × ٢ + ٣ × س + ٣ × ٢

= س^{٢} + ٢ س + ٣ س + ٦

= س^{٢} + ٥ س + ٦

نلاحظ: المقدار (س+٣)، (س+٢) يسمى كل منهما مقدار من الدرجة الأولى لماذا؟

ما أكبر درجة رفع إليها المتغير س في ناتج حاصل الضرب لمقدارين؟

يسمى هذا النوع من المقادير الجبرية مقدار من الدرجة الثانية ويتكون من ثلاثة حدود.

∴ س^{٢} + ٥ س + ٦ = (س + ٢) (س + ٣)

أ/ ما علاقة ٣ و ٢ بمعامل س؟

معامل س يساوي حاصل جمع العددين ٣ و ٢

ب/ ما علاقة ٣ و ٢ بالحد المطلق؟

الحد المطلق يساوي ناتج حاصل ضرب ٣ × ٢

المقدار الجبري س^{٢} + (م + ن) س + م ن يحلل إلى عاملين هما (س + م) ، (س + ن)

∴ س^{٢} + (م + ن) س + م ن = (س + م) (س + ن)

معامل س = م + ن

الحد المطلق = م × ن

لتحليل المقدار الجبري $س^٢ + ٧ س + ١٢$ نبحث عن عاملين حاصل ضربهما ١٢ ومجموعهما ٧

∴ $س^٢ + ٧ س + ١٢ = (س \quad)(س \quad)$

يحلل الحد المطلق (١٢) إلى

١ × ١٢

-١ × -١٢

٢ × ٦

-٢ × -٦

٣ × ٤

-٣ × -٤

ما العاملان اللذان حاصل ضربهما ١٢ ومجموعهما ٧ هما ٣ ، ٤

∴ $س^٢ + ٧ س + ١٢ = (س + ٣)(س + ٤)$

مثال :

حلل كلاً مما يأتي تحليلاً كاملاً:

أ) $س^٢ + ٩ س + ٢٠$

ب) $س^٢ - ٥ س + ٦$

جـ) $س^٢ - س - ٦$

د) $٤ س + س^٢ - ١٢$

هـ) $س^٣ - ٣ س^٢ + ٢٨ س$

ز) $٢س^٢ + ٨ س + ٦$

الحل:

أ) لتحليل المقدار س^{٢}+٩ س + ٢٠ نبحث عن عاملين حاصل ضربهما ٢٠ ومجموعهما ٩ .

تحليل الحد المطلق (٢٠) إلى

١ × ٢٠ ،	–١ × –٢٠
٢ × ١٠	–٢ × –١٠
٤ × ٥	–٤ × –٥

ما العاملان اللذان مجموعهما ٩ وحاصل ضربهما ٢٠

∴ س٢ + ٩ س+ ٢٠ = (س + ٤) (س + ٥)

ب) لتحليل المقدار س^{٢} – ٥ س + ٦ نبحث عن عاملين حاصل ضربهما ٦ ومجموعهما –٥

نحلل الحد المطلق (٦) إلى	١ × ٦	–١ × – ٦
	٢ × ٣	–٢ × –٣

ما العاملان اللذان حاصل ضربهما ٦ ومجموعهما –٥

هما –٣ ، –٢

∴ س^{٢} + ٥ س + ٦ = (س – ٣) (س – ٢)

جـ) لتحليل المقدار س^{٢} – س – ٦ نبحث عن عاملين حاصل ضربهما –٦ ومجموعها –١

نحلل الحد المطلق (–٦) إلى	–١ × ٦	١ × –٦
	–٣ × ٢	٣ × –٢

ما العاملان اللذان حاصل ضربهما –٦ ومجموعهما – ١

هما ٢ ، –٣

∴ س^{٢} – س – ٦ = (س + ٢) (س – ٣)

د) لتحليل المقدار ٤ س + $س^٢$ – ١٢

أولاً: نرتب المقدار بالصورة $س^٢$ + ب س + جـ

$س^٢$ + ٤ س – ١٢

نبحث عن عاملين حاصل ضربهما –١٢ ومجموعهما ٤

نحلل الحد المطلق (–١٢) إلى

–١ × ١٢	١ × –١٢
–٢ × ٦	٢ × –٦
–٣ × ٤	٣ × –٤

ما العاملان اللذان حاصل ضربهما –١٢ ومجموعهما ٤

هما: ٦ ، –٢

∴ $س^٢$ + ٤ س – ١٢ = (س + ٦) (س – ٢)

هـ) لتحليل المقدار الجبري $س^٣$ – ٣ $س^٢$ – ٢٨ س

أولاً: نستخرج العامل المشترك (بأصغر أُس)

∴ س($س^٢$ – ٣س – ٢٨) ما بداخل القوس مقدار جبري بسيط على الصورة

$س^٢$ + ب س + جـ يمكن تحليله

لتحليل المقدار الجبري البسيط $س^٢$ – ٣ س – ٢٨ نبحث عن عاملين حاصل ضربهما – ٢٨ ومجموعهما –٣

نحلل الحد المطلق (– ٢٨) إلى

–١ × ٢٨	١ × – ٢٨
–٢ × ١٤	٢ × –١٤
–٤ × ٧	٤ × –٧

ما العاملان اللذان حاصل ضربهما – ٢٨ ومجموعهما –٣

هما ٤ ، –٧

∴ $س^2 - ٣ س - ٢٨ = (س + ٤) (س - ٧)$

∴ $س^3 - ٣ س^2 - ٢٨ س = س (س^2 - ٣ س - ٢٨)$

$= س (س + ٤) (س - ٧)$

ز) لتحليل المقدار الجبري البسيط $٢ س^2 + ٨ س + ٦$

أولاً: نستخرج العامل المشترك $٢ (س^2 + ٤ س + ٣)$ والمقدار $س^2 + ٤ س + ٣$ هو مقدارجبري بسيط على الصورة

$س^2 + ب س + جـ$

ولتحليل المقدار $س^2 + ٤ س + ٣$ نبحث عن عاملين حاصل ضربهما ٣ ومجموعهما ٤

نحلل الحد المطلق (٣) إلى ١×٣

-١×-٣

ما العاملان اللذان حاصل ضربهما ٣ ومجموعهما ٤

هما ١ ، ٣

∴ $س^2 + ٤ س + ٣ = (س + ١) (س + ٣)$

∴ $٢ س^2 + ٨ س + ٦ = ٢ (س^2 + ٤ س + ٣)$

$= ٢ (س + ١) (س + ٣)$

تمرين (٨)

حلل كل ما يأتي تحليلاً كاملاً إن أمكن:

(١) س^{٢} + ٧ س − ٨

(٢) س^{٢} + ١٠س + ٢٤

(٣) س^{٢} − ٥ س − ٣٦

(٤) س^{٢} − ١١س + ٣٠

(٥) س^{٢} + ١١س + ٢٤

(٦) س^{٢} − ٢ س + ٣٥

(٧) ٢ س^{٢} − ٢٤ س + ٤٠

(٨) س^{٢} − ٥ س ص + ٦ ص^{٢}

(٩) ١٥ + ٢ س − س^{٢}

(١٠) ل^{٢} − ١٠ل + ٢١

(٩-٥) : المربع الكامل:

المربع الكامل:

المربع الكامل هو ناتج ضرب عدد أو مقدار في نفسه.

مثلاً:

٩ هو مربع كامل لأنه يساوي ٣ × ٣ أو – ٣ × – ٣

مثلاً:

١٢ ليس مربعاً كاملاً لأنه لا يوجد عدد يضرب في نفسه يساوي ١٢.

تحقق من فهمك:

١/ أي الأعداد الآتية تمثل مربعاً كاملاً ولماذا؟

١٦ ، ٥ ، ٢٥ ، ١٧ ، ١٤٤ ، ٧

٢/ هل س^{٢} تمثل مربعاً كاملاً ولماذا؟

٣/ هل ٤ س^{٢} تمثل مربعاً كاملاً ولماذا؟

معلوم أن المقادير الجبرية

س^{٢} + ٦ س + ٩ = (س + ٣) (س + ٣) = (س + ٣)^{٢}

س^{٢} – ٦ س + ٩ = (س – ٣) (س – ٣) = (س – ٣)^{٢}

في كلا الحالتين العاملان متساويان مثل هذه المقادير تسمي **مربعات كاملة**.

٢) مفكوك المربع الكامل :

مفهوم أساسي

مفكوك المربع الكامل

التعبير اللفظي: مفكوك مربع مجموع حدين = مربع الحد الأول + ٢ × الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني

التعبير الرمزي: (أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ × أ × ب + ب^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}

أمثلة: (س + ٣)^{٢} = س^{٢} + ٢ × س × ٣ + ٣^{٢} = س^{٢} + ٦ س + ٩

(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ × س × ص + ص^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}

مثال (١) :

جد مفكوك كل مما يأتي:

(أ) (س + ١)^{٢} (ب) (٢ + س)^{٢} (جـ) (٢ ص + ٣)^{٢}

الحل :

(أ) (س + ١)^{٢} = س^{٢} + ٢ × س × ١ + ١^{٢} = س^{٢} + ٢ س + ١

(ب) (٢ + س)^{٢} = ٢^{٢} + ٢ × ٢ × س + س^{٢} = ٤ + ٤ س + س^{٢}

(جـ) (٢ص + ٣)^{٢} = (٢ص)^{٢} + ٢ × ٢ ص × ٣ + ٣^{٢} = ٤ ص^{٢} + ١٢ص + ٩

تحقق من فهمك:

١/ جد مفكوك   أ) (س + ٥)^{٢} ب) (س^{٢} + ١)^{٢}

٢/ جد مفكوك   أ) (س +١) (س + ١)   ب) (س + ١)^{٢}

من (٢) قارن بين ما توصلت إليه في كل من أ ، ب وماذا نستنتج؟

مفهوم أساسي

مفكوك المربع الكامل

التعبير اللفظي: مفكوك مربع الفرق بين حدين = مربع الحد الأول – ٢ × الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني

التعبير الرمزي: $(أ – ب)^٢ = أ^٢ – ٢ × أ × ب + ب^٢ = أ^٢ – ٢ أ ب + ب^٢$

أمثلة: $(س - ٣)^٢ = س^٢ – ٢ × س × ٣ + ٣^٢ = س^٢ – ٦ س + ٩$

$(٢ – س)^٢ = ٢^٢ – ٢ × ٢ × س + س^٢ = ٤ – ٤ س + س^٢$

تحقق من فهمك:

١) جد مفكوك

أ) $(س – ص)^٢$ ب) $(س – ٥)^٢$

٢) هل $(٥ – س)^٢ = (س – ٥)^٢$ ؟ **ارشاد:** جرب س = ٢ على الطرفين

جرب س = –٢ على الطرفين

فسر ما توصلت إليه في إجابتك؟

تطبيقات على مربع مجموع أو فرق حدين

مثال (٢):

مستخدماً مفكوك المربع الكامل جد قيمة:

أ) $(٢١)^٢$ ب) $(١٩)^٢$ جـ) $(٥١)^٢$ د) $(٤٩)^٢$

الحل:

أ) $(٢١)^٢ = (٢٠+ ١)^٢ = ٢٠^٢ + ٢ × ٢٠ × ١ + ١^٢ = ٤٠٠ + ٤٠ + ١ = ٤٤١$

ب) $(١٩)^٢ = (٢٠ - ١)^٢ = ٢٠^٢ - ٢ × ٢٠ × ١ + ١^٢ = ٤٠٠ - ٤٠ + ١ = ٣٦١$

جـ) $(٥١)^٢ = (٥٠ + ١)^٢ = ٥٠^٢ + ٢ \times ٥٠ \times ١ + ١^٢ = ٢٥٠٠ + ١٠٠ + ١ = ٢٦٠١$

د) $(٤٩)^٢ = (٥٠ - ١)^٢ = ٥٠^٢ - ٢ \times ٥٠ \times ١ + ١^٢ = ٢٥٠٠ - ١٠٠ + ١ = ٢٤٠١$

مثال (٣):

إذا كان أ + ب = ٨ ، أ^٢ + ب^٢ = ٤٠ فما قيمة كل من

١) (أ + ب)^٢ ٢) أ ب   ٣) (أ – ب)^٢

الحل:

١) (أ + ب)^٢ = (٨)^٢ = ٦٤

٢) لإيجاد أ ب نوجد مفكوك

(أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢ × أ × ب + ب^٢ = أ^٢ + ٢أ ب + ب^٢ = أ^٢ + ب^٢ + ٢ أ ب

٦٤ = ٤٠ + ٢ أ ب

٦٤ – ٤٠ = ٢ أ ب

٢٤ = ٢ أ ب

∴ أ ب = $\frac{٢٤}{٢}$ = ١٢

٣) (أ – ب)^٢ = أ^٢ – ٢ × أ × ب + ب^٢ = أ^٢ – ٢ أ ب + ب^٢

= أ^٢ + ب^٢ – ٢ أ ب

= ٤٠ – ٢ × ١٢

= ٤٠ – ٢٤

= ١٦

تمرين (٩)

(١) أي المقادير الآتية مربعات كاملة ؟ ولماذا ؟

(أ) $س^٢$ (ب) ٨١ (جـ) ١٣ د) $(س - ٦)^٢$

(٢) جد مفكوك:

(أ) $(ص - ٣)^٢$ (ب) $(ص - ٢ س)^٢$ (جـ) $(س + ٢)^٢$

(٣) جد قيمة الآتي مستخدماً مفكوك المربع الكامل :

(أ) $(٩٩)^٢$ (ب) $(١٠١)^٢$ (جـ) $(٤١)^٢$

(د) $(٣٩)^٢$ (هـ) $(٩)^٢$ (و) $(١١)^٢$

(٤) إذا كان أ + ب = ١٠ ، $أ^٢ + ب^٢ = ٦٠$

فما قيمة كل من:

أ) $(أ + ب)^٢$ ب) أ ب ج) $(أ - ب)^٢$

(٥- ١٠) : تمييز المربع الكامل :

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: المقدار الجبري يكون مربعاً كاملاً إذا تكون من ثلاثة حدود تتوفر فيها الشروط الآتية:

١/ الحد الأول مربعاً كاملاً.

٢/ الحد الثاني (الحد الأوسط) يساوي ضعف حاصل ضرب جذر الحد الأول في جذر الحد الثالث.

٣/ الحد الثالث مربعاً كاملاً.

التعبير الرمزي: $(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ \times أ \times ب \times ب^{٢}$

أمثلة: $س^{٢} + ٨$ س $+ ١٦$ مربع كامل

الحد الأول $س^{٢}$ مربع كامل (س $\times$ س)

الحد الأوسط $= ٢ \times \sqrt{س^{٢}} \times \sqrt{١٦} = ٢ \times$ س $\times ٤ = ٨$ س

الحد الثالث ١٦ مربع كامل (٤×٤)

$ص^{٢} + ١٢ص + ٣٦$ مربع كاملاً وذلك لأن

الحد الأول $= ص^{٢}$ مربع كامل

الحد الأوسط $= ٢ \times \sqrt{ص^{٢}} \times \sqrt{٣٦} = ٢ \times$ ص $\times ٦ = ١٢ص$

الحد الثالث $= ٣٦$ مربع كامل

تحقق من فهمك:

هل المقادير الجبرية الآتية مربعات كاملة ولماذا؟

أ/ $س^{٢} + ١٠س + ٢٥$ ب/ $س^{٢} - ١٠س + ٢٥$ جـ/ $س^{٢} + ٩$

مثال(١):

هل المقدار س^٢ + ٢س + ١ مربعاً كاملاً ؟

الحل :

الحد الأول = س^٢ مربعاً كاملاً

الحد الأوسط = ٢ × $\sqrt{س^٢}$ × $\sqrt{١}$ = ٢ × س × ١ = ٢ س

الحد الثالث = ١ مربعاً كاملاً

∴ المقدار س^٢ + ٢س + ١ مربعاً كاملاً

مثال (٢) :

جد الحد الذي يمكن إضافته للمقدار س^٢ + ٢٥ ليكون الناتج مربعاً كاملاً .

الحل :

الحدان س^٢ ، ٢٥ مربعان كاملان فهما يمثلان الحد الأول والثالث ويمكن أن نعتبر الحد الأول = س^٢ ، الحد الثالث = ٢٥ أو العكس

الحد الذي يمكن إضافته هو الحد الأوسط

∴ الحد الأوسط = ٢ × $\sqrt{\text{الحد الأول}}$ × $\sqrt{\text{الحد الثالث}}$ = ٢× $\sqrt{س^٢}$ × $\sqrt{٢٥}$

= ٢ × س × ٥

= ١٠ س

∴ الحد الذي يمكن إضافته هو ١٠س

مثال (٣) :

ما الحد الذي يجب إضافته للمقدار $س^٢ - ٨ س$

ليكون الناتج مربعاً كاملاً.

الحل:

بما أن الحدين الأول والأوسط موجودان ، فإن الحد الثالث يمكن الحصول عليه وفق الشرط الآتي:

$$\text{الحد الأوسط} = ٢ \times \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}$$

$$\sqrt{\text{الحد الثالث}} = \frac{\text{الحد الأوسط}}{٢ \times \sqrt{\text{الحد الأول}}}$$

نقوم بتربيع الطرفين لنحصل على الحد الثالث ، إذن الحد الثالث $= \left(\frac{\text{الحد الأوسط}}{٢ \times \sqrt{\text{الحد الأول}}}\right)^٢$

$$\therefore \text{الحد الثالث} = \left(\frac{-٨\,س}{٢\sqrt{س^٢}}\right)^٢ =$$

$$= \left(\frac{-٨\,س}{٢س}\right)^٢ = (-٤)^٢ = ١٦$$

$\therefore$ الحد الذي يجب إضافته هو ١٦

مثال (٤):

أكمل المقدار .... $- ١٤$ س $+ ٤٩$ ليصبح مربعاً كاملاً .

الحل:

المطلوب إيجاد الحد الأول ومعطي الحد الأوسط والثالث ويمكن الحصول على الحد الأول وفق الشرط الآتي:

$$\text{الحد الأوسط} = ٢ \times \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}$$

$$\sqrt{\text{الحد الأول}} = \frac{\text{الحد الأوسط}}{2 \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}}$$

بتربيع الطرفين

$$\therefore \text{الحد الأول} = \left(\frac{\text{الحد الأوسط}}{2 \times \sqrt{\text{الحد الثالث}}}\right)^2$$

$$\therefore \text{الحد الأول} = \left(\frac{-14\,س}{2 \times \sqrt{49}}\right)^2 = \left(\frac{-14\,س}{2 \times 7}\right)^2 = س^2$$

تمرين (١٠)

(١) أي المقادير الآتية مربعات كاملة (وضح بالخطوات):

(أ) $س^2 + 8\,س + 16$

(ب) $ص^2 + 36$

(جـ) $1 + 2س + س^2$

(د) $س^2 + 2س\,ص + ص^2$

(٢) ما الحد الذي يجب إضافته للمقادير أدناه لتكون النتيجة مربعات كاملة:

(أ) $س^2 + 16س + ...$

(ب) $ل^2 + ... + 36$

(ج) $4س^2 + ... + 1$

(د) $... - 18\,س + 81$

(٥-١١) : تحليل المربع الكامل :

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لتحليل مقدار ثلاثي مربع كامل = $(\sqrt{\text{الحد الأول}} \pm \sqrt{\text{الحد الثالث}})^٢$

حيث الإشارة داخل القوسين تتبع إشارة الحد الأوسط

التعبير الرمزي: $أ^٢ \pm ٢\,أ\,ب + ب^٢ = (\sqrt{أ^٢} \pm \sqrt{ب^٢})^٢ = (أ \pm ب)^٢$

مثال :

أ) $س^٢ - ٢٢س + ١٢١$

ب) $٤\,س^٢ + ٢٨س + ٤٩$

الحل :

أ) $س^٢ - ٢٢س + ١٢١ = (\sqrt{س^٢} - \sqrt{١٢١})^٢ = (س - ١١)^٢$

ب) $٤\,س^٢ + ٢٨س + ٤٩ = (\sqrt{٤س^٢} + \sqrt{٤٩})^٢ = (٢س + ٧)^٢$

تمرين (١١)

حلّل المقادير الجبرية التالية :

١/ $س^٢ + ٨\,س + ١٦$

٢/ $ص^٢ - ٦\,ص + ٩$

٣/ $س^٢ + ٢٤س + ١٤٤$

٤/ $أ^٢ - ٤أ + ٤$

٥/ $س^٢ - ٢\,س\,ص + ص^٢$

(٥-١٢) : تحليل الفرق بين مربعين

نشاط (١):

يمتلك مزارع قطعة أرض زراعية مربعة الشكل طول ضلعها ٢٠ متر أُقتطع منها قطعة أرض مربعة طول ضلعها ١٥ متر فما مساحة الأرض المتبقية من أرض المزارع:

الحل:

مساحة الأرض المتبقية = مساحة الأرض الكلية – مساحة الأرض المقتُطعة

معلوم أن مساحة المربع = الضلع × الضلع

∴ مساحة الأرض المتبقية = ٢٠ × ٢٠ – ١٥ × ١٥

$= ٢٠^٢ - ١٥^٢$

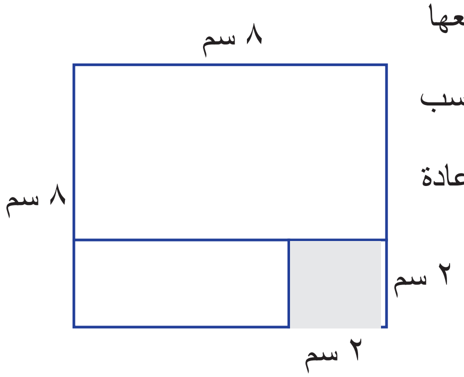
= ٤٠٠ – ٢٢٥ = ١٧٥ متر مربع .

هل يمكن حساب المساحة المتبقية بطريقة أخرى

هذا ما سنجيب عليه في النشاط العملي التالي:

نشاط (٢):

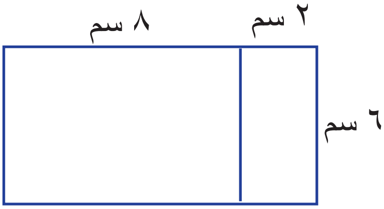
احضر قطعة كرتون مربعة ، طول ضلعها ٨سم ، قُص منها مربعاً طول ضلعه ٢سم أحسب مساحة القطعة المتبقية بعد قص المربع، بإعادة تركيب القطع المتبقية لتكون مستطيلاً كما في الشكل.



طول المستطيل الناتج = ١٠سم لماذا؟

عرض المستطيل الناتج = ٦سم لماذا ؟

مساحة المستطيل = ١٠ × ٦ = ٦٠ سم^٢ لماذا ؟



الفرق بين مساحتي المربعين الكبير و الصغير

مساحة المربع الكبير – مساحة المربع الصغير

٨ × ٨ – ٢ × ٢

٨^٢ – ٢^٢ = ٦٤ – ٤ = ٦٠ سم^٢

أي أن:

الفرق بين المربعين الكبير والصغير = مساحة مستطيل طوله مجموع ضلعي المربعين وعرضه الفرق بين طولي ضلعي المربعين.

٨^٢ – ٢^٢ = (٨ + ٢) (٨ – ٢)

٦٤ – ٤ = ١٠ × ٦

٦٠ سم^٢ = ٦٠ سم^٢

أي أن ٨^٢ – ٢^٢ = (٨ + ٢) (٨ – ٢)

مفهوم أساسي

الفرق بين مربعين

التعبير اللفظي: الفرق بين مساحتي مربعين تساوي مساحة مستطيل طوله (مجموع ضلعي المربعين) ، وعرضه الفرق بين طولي ضلعي المربعين

التعبير الرمزي: س^٢ – ص^٢ = (س + ص) (س – ص)

أمثلة : ٨^٢ – ٢^٢ = (٨ + ٢) (٨ – ٢) = ١٠ × ٦ = ٦٠

٢٠^٢ – ١٥^٢ = (٢٠ + ١٥) (٢٠ – ١٥) = ٣٥ × ٥ = ١٧٥

مثال (١) :

حلل المقادير الجبرية التالية:

١) س^{٢} – ٣٦   ٢) ص^{٢} – ٢٥   ٣) ٨ س^{٢} – ٧٢

٤) ٤ س^{٢} – ٩

الحل :

١) س^{٢} – ٣٦ = س^{٢} – ٦^{٢} = (س + ٦)(س – ٦)

٢) ص^{٢} – ٢٥ = ص^{٢} – ٥^{٢} = (ص + ٥) (ص – ٥)

٣) ٨ س^{٢} – ٧٢ = ٨ (س^{٢} – ٩) = ٨ (س^{٢} – ٣^{٢}) = ٨(س + ٣) (س – ٣)

٤) ٤ س^{٢} – ٩ = (٢س)^{٢} – ٣^{٢} = (٢س + ٣) (٢س – ٣)

مثال (٢) :

حلل تحليلاً كاملاً ما يلي:

أ) (س + ١)^{٢} – ٤   ب) ٤ – (٢س – ٣)^{٢}

الحل :

أ) (س + ١)^{٢} – ٤ = (س + ١)^{٢} – ٢^{٢} = (س+١+٢) (س+١ –٢)

= (س + ٣) (س – ١)

ب) ٤ – (٢س – ٣)^{٢} = ٢^{٢} – (٢س – ٣)^{٢}

= (٢ + ٢س – ٣) (٢ – ٢س + ٣)

= (٢س – ١) (٥ – ٢س)

مثال (٣) :

عبر عن الآتي بصورة فرق بين مربعين

أ) (س + ١) (س – ١)

ب) (أ ب – جـ) (أ ب + جـ)

جـ) (س + ١٠) (س – ١٠)

الحل:

أ) (س + ١) (س – ١) = س^{٢} – ١^{٢} = س^{٢} - ١

ب) (أ ب – جـ) (أ ب + جـ) = (أ ب)^{٢} – جـ^{٢} = أ^{٢} ب^{٢} – جـ^{٢}

جـ) (س + ١٠) (س – ١٠) = س^{٢} – ١٠^{٢} = س^{٢} – ١٠٠

تمرين (١٢):

١) **حلل المقادير الجبرية الآتية:**

أ) ن^{٢} – ٩   ب) ٤ س^{٢} – ١   ج) ٢ – ١٨س^{٢}

٢) عبر عن الآتي بصورة فرق بين مربعين

أ/ (س – ٣) (س + ٣)

ب/ (٣م – ٢) (٣م + ٢)

٣) حلل تحليلاً كاملاً:

أ/ (س + ١)^{٢} – أ^{٢}

ب/ $(م + ن)^٢ - (م - ن)^٢$

جـ/ $٢ - ٢ (٥ - س)^٢$

٤) أكمل الفراغات في كل مما يلي:

أ) $س^٢ - \boxed{} = (\boxed{} - ٧)(\boxed{} + ٧)$

ب) $٤أ^٢ - \boxed{} = (\boxed{} + ٣)(\boxed{} - ٣)$

(٥-١٣) : تطبيقات على الفرق بين مربعين :

مثال :

بدون عمليات الضرب المعتاد جد قيمة:

أ) ٨١ × ٧٩ ب) ٣٩ × ٤١ ج) ١٨ × ٢٢

الحل :

أ) ٨١ × ٧٩ = (٨٠ + ١) (٨٠ – ١) = ٨٠^{٢} – ١^{٢} = ٦٤٠٠ – ١ = ٦٣٩٩

ب) ٣٩ × ٤١ = (٤٠ - ١) (٤٠ + ١) = ٤٠^{٢} – ١^{٢} = ١٦٠٠ – ١ = ١٥٩٩

ج) ١٨ × ٢٢ = (٢٠ - ٢) (٢٠ + ٢) = ٢٠^{٢} – ٢^{٢} = ٤٠٠ – ٤ = ٣٩٦

تمرين (١٣)

(١) بدون إجراء الضرب المعتاد جد قيمة :

(أ) ١٧ × ٢٣ (ب) (٤٣ س) (٣٧ س) (جـ) (٤٩ س) (٥١ س)

(د) ٢٨ × ٣٢

(٢) جد قيمة الآتي :

(أ) (٦٧٨٩)^{٢} – (٦٧٨٨)^{٢}

(ب) (١٩٢٣)^{٢} – (١٩١٣)^{٢}

(ج) (٥٤٧٢)^{٢} – (٥٤٧٠)^{٢}

(٥-١٤) : تحليل مجموع مكعبين والفرق بينهما

نعلم أن $٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^٣ = ٨$

$٣ \times ٣ \times ٣ = ٣^٣ = ٢٧$

$\sqrt[٣]{٨} = ٢$ لماذا ؟ ، $\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$ لماذا ؟

$\sqrt[٣]{١٢٥} = ٥$ لماذا ؟ ، $\sqrt[٣]{س^٣} = س$ لماذا ؟

مستخدماً الخاصية التوزيعية جد الآتي:

(س + ص) (س^٢ – س ص + ص^٢)

(س – ص) (س^٢ + س ص + ص^٢)

بعد إجراء العملية التوزيعية نسمي ناتج الضرب مجموع مكعبين للعملية الأولى ونسمّى ناتج عملية الضرب الفرق بين مكعبين في العملية الثانية:

مفهوم أساسي

مجموع مكعبين والفرق بينهما

التعبير اللفظي: (الأول)^٣ ± (الثاني)^٣ = (الأول ± الثاني) (الأول^٢ ∓ الأول × الثاني + الثاني^٢)

التعبير الرمزي: أ^٣ ± ب^٣ = (أ ± ب) (أ^٢ ∓ أ × ب + ب^٢)

أمثلة: س^٣ + ص^٣ = (س + ص) (س^٢ – س ص + ص^٢)

س^٣ – ص^٣ = (س - ص) (س^٢ + س ص + ص^٢)

٢٧ س^٣ – ١ = (٣س –١) (٩ س^٢ + ٣ س +١)

مثال :

حلل ما يأتي :

(أ) $٦٤ + ص^٣$ (ب) $أ^٣ - ١$ (جـ) $٢٤ + ٣ س^٣$

الحل :

(أ) $٦٤ + ص^٣ = ٤^٣ + ص^٣ = (٤ + ص) (٤^٢ - ٤ ص + ص^٢)$

$= (٤ + ص) (١٦ - ٤ ص + ص^٢)$

(ب) $أ^٣ - ١ = أ^٣ - ١^٣ = (أ - ١) (أ^٢ + أ + ١)$

(جـ) $٢٤ + ٣ س^٣ = ٣(٨ + س^٣) = ٣(٢^٣ + س^٣)$

$= ٣(٢ + س) (٢^٢ - ٢س + س^٢)$

$= ٣(٢ + س) (٤ - ٢س + س^٢)$

تمرين (١٤)

حلّل ما يأتي :

١- $س^٣ - ٨$

٢- $١ - ٢٧ أ^٣$

٣- $س^٣ ص^٣ - ١$

٤- $٣ س^٣ - ٢٤$

٥- $٨ س^٣ - ١٢٥$

٦- $٦٤ - ٢٧ ص^٣$

الوحدة السادسة

معادلات الدرجة الثانية

تمهيد :

المعادلة على الصورة أ س + ب = جـ حيث أ ، ب، جـ ∈ ح حيث أ ≠ ٠

تسمى معادلة من الدرجة الأولى في المتغير س ويقال لها معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد، وعند إيجاد قيمة س نسميها جذر المعادلة.

مثال:

جد جذر المعادلة ومجموعة الحل لكل المعادلات الآتية (س ∈ ن)

١) ٣ س + ٢ = ١٤

٢) ٣ س + ٥ = ٢ س – ١

٣) ٢ س – ٧ = ٣ س + ٥

٤) ما العدد الذي إذا أُضيف إليه سدسه كان الناتج ١٤؟

الحل:

١) ٣ س + ٢ = ١٤

٣ س + ٢ – ٢ = ١٤ – ٢

٣ س = ١٢

$$\frac{٣\ س}{٣} = \frac{١٢}{٣}$$

س = ٤ ∴ جذر المعادلة = ٤

مجموعة الحل هي {٤}

٢) ٣ س + ٥ = ٢ س – ١

٣ س + ٥ – ٢ س = ~~٢ س~~ – ١ – ~~٢ س~~

س + ٥ = –١

س + ~~٥~~ – ~~٥~~ = –١ – ٥

س = –٦ ∴ جذر المعادلة = –٦

مجموعة الحل {–٦}

٣) ٢ س – ٧ = ٣ س + ٥

٢ س – ٧ – ٣ س = ~~٣ س~~ + ٥ – ~~٣ س~~

– س – ٧ = ٥

– س – ~~٧~~ + ~~٧~~ = ٥ + ٧

–١ × – س = ١٢ × –١

س = - ١٢ ∴ جذر المعادلة = –١٢

مجموعة الحل {–١٢}

٤) نفرض أنّ العدد = س

سدس العدد = ١/٦ س

س + ١/٦ س = ١٤

$٦ \times \text{س} + ٦ \times \frac{١}{٦}\,\text{س} = ١٤ \times ٦$

$٦\,\text{س} + \text{س} = ٨٤$

$٧\text{س} = ٨٤$

$\frac{٧\,\text{س}}{٧} = \frac{٨٤}{٧}$

$\therefore\ \text{س} = ١٢$ جذر المعادلة = ١٢

مجموع الحل هي { ١٢ }

تمرين مراجعة

١/ جد جذر المعادلة ومجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية (س ∈ ص) :

أ/ $\text{س} + ٣ = ١٥ - \text{س}$

ب/ $١٢\,\text{س} - ٩ = ٤\,\text{س} - ٥$

جـ/ $\frac{١}{٤}\,\text{س} + \frac{١}{٣}(\text{س} - ٥) = ١٠$

٢/ حلل كلاً من المقادير الآتية:

أ. $\text{س}^٢ - ٨\,\text{س}$

ب. $\text{س}^٢ + ٤\,\text{س} - ٥$

جـ. $\text{س}^٢ - ١١\,\text{س} + ٢٨$

د. $(\text{س} - ٣)^٢ - ٢٥$

(١-٦) الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في متغير واحد :

المعادلة التي يمكن وضعها على الصورة:

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

تسمى معادلة من الدرجة الثانية في المتغير س أو معادلة تربيعية في المتغير س وبصفة عامة يقال لها معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد لأن أكبر قوة للمتغير هي ٢، يسمى أ معامل س^{٢} ، و ب معامل س، جـ الحد المطلق وعند حل المعادلة وإيجاد قيمتي س تسمى جذري المعادلة.

حل معادلة الدرجة الثانية :

إذا تم ضرب أي عدد في صفر فإن النتيجه صفر، فإذا كان أ × ب = صفر فهذا يعني إما أ = صفر أو ب = صفر حيث أ ، ب ∈ ح وتسمى خاصية الضرب الصفري.

مثال (١)

جد مجموعة حل المعادلة س + ٥ = ٠ (س ∈ ح)

الحل:

س + ٥ = ٠

س + $\cancel{٥}$ ـ $\cancel{٥}$ = ٠ ـ ٥

س = ـ٥

∴ مجموعة الحل هي { ـ٥}

مثال (٢) :

جد مجموعة حل كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة الحل :

١- (س + ٢) (س + ٧) = ٠ (س ∈ ح)

٢- (س – ٢) (س + ٣) = ٠ (س ∈ ص)

الحل :

١- (س + ٢) (س + ٧) = ٠

إما س + ٢ = ٠ أو س + ٧ = ٠ خاصية الضرب الصفري

∴ س = –٢ أو س = –٧ حل المعادلة

الجذران هما –٢ ، – ٧

∴ مجموعة الحل = { – ٧ , –٢ }

التحقق (–٢ + ٢) (–٢ + ٧) = (صفر) (٥) = صفر

(–٧ + ٢) (–٧ + ٧) = (– ٥) (صفر) = صفر

٢- (س – ٢) (س + ٣) = ٠

إما س – ٢ = ٠ أو س + ٣ = ٠ خاصية الضرب الصفري

∴ س = ٢ أو س = –٣ حل المعادلة

الجذران هما –٣ ، ٢

∴ مجموعة الحل = {–٣ ، ٢}

التحقق: (–٣ –٢) (–٣ + ٣) = (– ٥) (صفر) = صفر

(٢ – ٢) (٢ + ٣) = (صفر) (٥) = صفر

تمرين (١)

(١) جد معامل $س^٢$ ، معامل س ، و الحد المطلق في كل من المعادلات التالية :

(أ) $٢ س^٢ + ٧ س - ١٥ = ٠$

(ب) $\frac{١}{٢} س^٢ + أ س - ١٢ = ٠$

(جـ) $س^٢ - ٥ س + ٣ = ٠$

(د) $٢ - س^٢ + س = ٠$

(هـ) $س^٢ = ٣ س - ٨$.

(٢) جد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية وتحقق من الحل:

أ) (س - ٥) (س - ١) = صفر (س ∈ ح)

ب) (س + ١) (س - ٣) = صفر (س ∈ ح)

ج) (س + ٧) (س + ١) = صفر (س ∈ ح)

(٦-٢) حل معادلات الدرجة الثانية :

توجد عدة طرائق لحل معادلة الدرجة الثانية وسنتعرّض لواحدة من هذه الطرائق تسمى حل معادلة الدرجة الثانية بالتحليل وسنتناول المعادلات التي يكون فيها معامل $س^٢$ يساوي واحد أي أن أ = ١ وتصبح المعادلة بالصورة $س^٢ +$ ب س + جـ = صفر

وخطوات حل المعادلة $س^٢ +$ ب س + جـ = صفر كالآتي :

(١) نجعل المعادلة بالصورة الصفرية ($س^٢ +$ ب س + جـ = صفر).

(٢) نحلل المقدار في الطرف الأيمن إلى عاملين كل منها من الدرجة الأولى.

(٣) نساوي كل عامل من عوامل الدرجة الأولى بالصفر.

(٤) نحل كل من معادلتي الدرجة الأولى لإيجاد قيمة س (جذر المعادلة).

مثال (١) :

جد مجموعة حل المعادلة التالية في ح $س^٢ + ٤$ س + ٣ = صفر

الحل :

$س^٢ + ٤$ س + ٣ = صفر المعادلة الأصلية

(س + ١) (س + ٣) = صفر حلل إلى عوامل

إما س + ١ = ٠ أو س + ٣ = ٠ خاصية الضرب الصفري

∴ س = –١ ، أو س = –٣ حل المعادلة

∴ مجموعة الحل هي = { –٣ ، –١ }

مثال (٢) :

جد جذري المعادلة التالية (س ∈ ح)

س^{٢} – ٢ س – ٣ = صفر

الحل :

س^{٢} – ٢ س – ٣ = ٠	المعادلة الأصلية
(س +١) (س – ٣) = ٠	حلل المعادلة
إما س + ١ = ٠ أو س – ٣ = ٠	خاصية الضرب الصفري
∴ س = –١ أو س = ٣	حل المعادلة
∴ جذرا المعادلة هما –١ ، ٣	

تمرين (٢)

أ/ جد مجموعة حل المعادلات التالية في ح :

(١) س^{٢} – س = ٦

(٢) س^{٢} + ٧ س + ٦ = ٠

(٣) س^{٢} + ٣ س – ١٠ = ٠

(٤) س^{٢} – ٢ س + ١ = ٠

(٥) س^{٢} – ٦ س = ١٦

(٦) $س^٢ - ٥ س - ٦ = ٠$

(٧) $س^٢ + ٣ س - ٤ = ٠$

(٨) $س^٢ + ٨ س + ١٢ = ٠$

(٩) $س^٢ + ٢ س + ١ = ٠$

ب/ جد جذري المعادلات الآتية في ح وتحقق من صحة الحل:

(١) $س^٢ - ٦ س = ٧$

(٢) $س^٢ = ٢ س + ٣$

(٣) $س^٢ - س - ٢٠ = ٠$

(٤) $س^٢ + ٥ س = ١٤$

(٦-٣) الحالات الخاصة لمعادلة الدرجة الثانية :

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية: س^{٢} + ب س + جـ = ٠ عند أ = ١

هل يمكن أن يكون أ = ٠ ولماذا ؟

قد يكون ب = ٠ أو جـ = ٠ فتصبح المعادلة العامة على :

الحالة الأولى: عند جـ = ٠

في هذه الحالة تكون المعادلة على الصورة س^{٢} + ب س = ٠

مثال (١)

جد مجموعة حل المعادلة س^{٢} – ٥ س = ٠ س ∈ ح

الحل :

س^{٢} – ٥ س = ٠	المعادلة الأصلية
س(س – ٥) = ٠	العامل المشترك
إما س = ٠ أو س – ٥ = ٠	خاصية الضرب الصفري
∴ س = ٠ أو س = ٥	حل المعادلة

مجموعة الحل = { ٠ ، ٥ }

الحالة الثانية: عند ب = صفر

في هذه الحالة تكون المعادلة على الصورة $س^2 + جـ = ٠$

مثال (٢) :

جد مجموع حل المعادلة (س ∈ ح) :

$س^2 - ١ = ٠$

الحل :

$س^2 - ١ = ٠$	المعادلة الأصلية
$(س - ١)\ (س + ١) = ٠$	تحليل فرق بين مربعين
إما $س - ١ = ٠$ أو $س + ١ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
∴ $س = ١$ أو $س = -١$	حل المعادلة

مجموعة الحل هي { -١ ، ١ }

مثال (٣)

جد مجموعة حل المعادلة $س^2 + ٤٩ = ٠$ (س ∈ ح)

الحل :

$س^2 + ٤٩ = ٠$	المعادلة الأصلية
$س^2 + ٤٩ = ٠$	غير قابلة للتحليل في مجموعة الأعداد الحقيقية

$س^2 = -٤٩$ المعادلة غير قابلة للحل في ح لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعة سالب .

∴ مجموعة الحل = { } أو ϕ

تمرين (٣)

جد مجموعة حل كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة الحل (س ، ل ، د $\in$ ح)

(١) $س^2 - ٢٥ = ٠$

(٢) $س^2 + ٧ س = ٠$

(٣) $٠ = - س^2 + ٨١$

(٤) $ل^2 = ١٢١$

(٥) $س^2 + ١ = ٠$

(٦) $د^2 - ٩ = ٠$

(٧) $س^2 - ١٦ = ٠$

(٨) $٧س - س^2 = ٠$

(٦-٤) تكوين معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد إذا عُلم جذراها :

العلاقة بين جذري المعادلة س٢ + ب س + جـ = ٠ ومعاملات حدودها

إذا كان م ، ن هما جذرا المعادلة س^{٢} + ب س + جـ = ٠ وهذا يعني أن:

س = م أو س = ن

ومنها س – م = ٠ أو س – ن = ٠ (خاصية الضرب الصفري)

إذن (س – م) (س – ن) = ٠

وعندما نوجد مفكوك الطرف الأيمن نحصل على معادلة الدرجة الثانية

س^{٢} – ن س – م س + م ن = ٠

س^{٢} – (م + ن) س + م ن = ٠ (١)

س^{٢} + ب س + جـ = ٠ (٢)

بمقارنة (١) و (٢) ينتج

– (م + ن) = ب

∴ م + ن = – ب

مجموع الجذرين = – معامل س

م ن = جـ

حاصل ضرب الجذرين = الحد المطلق

طرق تكوين معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جذراها م ، ن

الطريقة الأولى:

١) نوجد جمع الجذرين م ، ن وضرب الجذرين م ، ن

٢) تكون المعادلة س^{٢} – (م + ن) س + م ن = ٠

لاحظ تغير الإشارة الناتجة عن جمع الجذرين بينما تبقى إشارة ضرب الجذرين دون تغير

الطريقة الثانية:

١) س = م ، س = ن

٢) العاملان هما (س – م) ، (س – ن)

٣) المعادلة (س – م) (س – ن) = ٠ ونوجد المفكوك.

ونكون المعادلة هي س^{٢} – (م + ن) س + م ن = ٠

∴ س^{٢} – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

المعادلة هي (س – م) (س – ن) = ٠

(س – احد الجذرين) (س – الجذر الآخر) = ٠

مثال (١):

كوّن المعادلة ذات الدرجة الثانية التي جذرها هما ـ٢ ، ١

الحل :

مجموع الجذرين = ـ٢ + ١ = ـ١

حاصل ضرب الجذرين = ـ٢ × ١ = ـ٢

∴ المعادلة هي: س^{٢} ـ (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ س^{٢} ـ (ـ١) س + (ـ٢) = ٠

س^{٢} + س ـ ٢ = ٠

حل آخر: الجذران هما ـ٢ ، ١

∴ س = ـ٢ ، س = ١

إما (س + ٢) = ٠ أو (س ـ ١) = ٠ (خاصية الضرب الصفري)

∴ (س + ٢) (س ـ ١) = ٠ المعادلة المطلوبة

∴ س^{٢} ـ س + ٢ س ـ ٢ = ٠ نفك الأقواس

س^{٢} + س ـ ٢ = ٠ نجمع الحدود المتشابهة

مثال (٢):

إذا كان أحد جذري المعادلة س^{٢} + س + جـ = ٠ هو ١

جد الجذر الآخر ثم جد قيمة جـ

الحل:

نفرض أن الجذر الآخر = م

∵ مجموع الجذرين = − معامل س لماذا؟

١ + م = −١

∴ م = −١ − ١ = −٢

∴ الجذر الآخر (م) = −٢

حاصل ضرب الجذرين = الحد المطلق

١ × −٢ = جـ

∴ قيمة جـ = −٢

مثال (٣):

إذا كان أحد جذري المعادلة س^{٢} + ب س − ٢٠ = ٠ هو ٢

جد الجذر الآخر ، ومن ثم جد قيمة ب

الحل:

نفرض أن الجذر الآخر = م

حاصل ضرب الجذرين = الحد المطلق لماذا؟

م × ٢ = −٢٠

∴ م = −١٠

∴ الجذر الآخر (م) = −١٠

مجموع الجذرين = − معامل س

−١٠ + ٢ = − ب

− ٨ = − ب

∴ ب = ٨ لماذا؟

تمرين (٤)

(١) كوّن المعادلة ذات الدرجة الثانية التي جذراها ٥ ، – ٦

(٢) كوّن المعادلة ذات الدرجة الثانية التي جذراها صفر ، – ٥

(٣) كوّن المعادلة التي جذراها متساويان وقيمة كل منها – ٧

(٤) بدون حل للمعادلات الآتية : جد حاصل جمع وضرب الجذرين:

أ. س^{٢} + ٨ س – ٤٨ = ٠

ب. س = ٦ – س^{٢}

جـ. س^{٢} – ٣ = س

(٥) إذا كان أحد جذري المعادلة س^{٢} + ك س + ٦ = ٠ هو ٣ جد الجذر الآخر وقيمة ك .

(٦) المعادلة س^{٢} – ٥ س + جـ = ٠ أحد جذريها هو ١ جد الجذر الآخر وقيمة جـ .

(٧) جد قيمة م ، ن إذا كان جذرا المعادلة :

س^{٢} + (ن + ١) س + ٣م = ٠ هما ٢ ، ٩

(تمرين عام)

(أ) جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) س^{٢} – ١٤س + ٤٨ = ٠

(٢) س^{٢} – ١ = ٠

(٣) س^{٢} – ١٢ س = ٠

(٤) س^{٢} – ٧ س + ٦ = ٠

(ب) كوِّن المعادلة التي مجموعة حلها هي { ٠ ، – ٤}

(جـ) أوجد مجموع وحاصل ضرب الجذرين في كل من المعادلات الآتية:

(١) س^{٢} – ٤٩ = ٠

(٢) س (س – ١) = ٤

(٣) $\frac{\text{س}}{٣} + \frac{٣}{\text{س}} = \frac{١٠}{٣}$

(د) أوجد قيم جـ إذا علم أنّ :

(١) أحد جذري المعادلة س^{٢} – ١٢ س + جـ = ٠ مربع الجذر الآخر

(٢) النسبة بين جذري المعادلة س^{٢} – جـ س + ٢٤ = ٠ كنسبة ٢: ٣

(٣) أحد جذري المعادلة س^{٢} – ٣ س + جـ = ٠ ضعف الجذر الآخر

(٤) أحد جذري المعادلة س^{٢} – جـ س + ١٥ = ٠ يزيد عن الآخر بمقدار ٢

(هـ) كوِّن المعادلة ذات الدرجة الثانية التي كل من جذريها يزيد ٤ عن كل من

جذري المعادلة $س^{٢} - ٨ س - ٩ = ٠$

(و) أوجد قيمة م التي تجعل مجموع جذري المعادلة $س^{٢} - (م + ٢) س + ٥ م^{٢} = ٠$

يساوي حاصل ضرب جذري المعادلة $س^{٢} - ٣ م س + م^{٢} = ٠$

الوحدة السابعة

الإحصاء

مراجعة

(١) الجدول التكراري التالي يمثل أعمار (٥٠) تلميذاً من تلاميذ الصف السادس ابتدائي مقدراً بالسنوات:

العمر	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
عدد التلاميذ	٧	٢٤	١٣	٤	٢

- ادرس الجدول ثم أجب عما يأتي:

أ/ كم تلميذاً يقل عمره عن ١٢ سنة؟

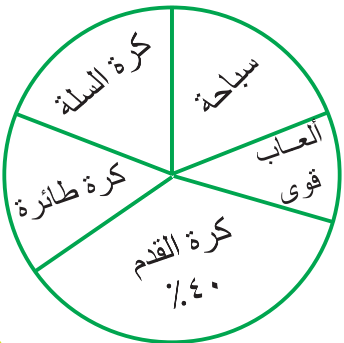
ب/ كم عدد التلاميذ الذين تزيد أعمارهم عن ١٢ سنة؟

ارسم رسماً بيانياً بالأعمدة لهذا الجدول.

(٢) القطاعات الدائرية التالية تمثل أنواع الرياضة المحببة لدى تلاميذ إحدى المدارس ودرجة تفضيل كل نوع منها حسب وجهة نظرهم.

إذا كان عدد التلاميذ الذين يفضلون كرة القدم يمثلون ٤٠٪ من التلاميذ البالغ عددهم ١٢٠٠ تلميذ، فكم عدد التلاميذ الذين يفضلون كرة القدم؟

- احسب زاوية القطاع الذي يمثل التلاميذ الذين يفضلون كرة القدم.
- ما أقل الألعاب تفضيلاً لهؤلاء التلاميذ ؟
- إذا كانت زاوية القطاع الذي يمثل كرة السلة ٥٤ درجة ، فما النسبة المئوية للتلاميذ الذين يفضلون كرة السلة؟



(٧-١) الجدول التكراري ذو الفئات

نشاط (١)

كوّن جدولاً تكرارياً للبيانات التالية التي تمثل درجات (٥٠) تلميذاً في إحدى المواد.

٣٧ ،	٤٤ ،	٢٠ ،	٣١ ،	٢٢ ،	١٩ ،	١ ،	١٢ ،	٣ ،	٨
٢٧ ،	٣٩ ،	٦ ،	٣٤ ،	٤٥ ،	٣٢ ،	٢٣ ،	١٧ ،	٤٢ ،	٢٦
١٧ ،	٣٣ ،	٣٩ ،	٤٢ ،	٣٣ ،	٤٨ ،	٨ ،	١٢ ،	٢٢ ،	٣٣
٤١ ،	١١ ،	٣٧ ،	٣٣ ،	١٦ ،	٢٣ ،	٤٦ ،	٣٤ ،	٣٢ ،	٢١
٣٨ ،	٣٦ ،	١١ ،	٢٨ ،	٢٧ ،	٤١ ،	٢٣ ،	٣٦ ،	١٨ ،	٤٢

لعلك لاحظت أن هنالك عدداً كبيراً من القيم ولكل قيمة عدد قليل من التكرارات، ويؤدي ذلك إلى صعوبة دراسة البيانات ومقارنتها. لذا نقوم في هذه الحالة بتقسيم هذه القيم إلى فئات بحيث تضم كل فئة مجموعة من القيم، ويمثل عددها تكرار هذه الفئة.

- كم عدد التلاميذ الذين حصلوا على الدرجة صفر وأقل من ١٠ ؟

  (صفر وأقل من ١٠)، نجد أنها ٥ تكرارات

- كم عدد التلاميذ الذين حصلوا على الدرجة ١٠ وأقل من ٢٠ ؟

  (١٠ وأقل من ٢٠)، نجد أنها ٩ تكرارات

- المجموعات (صفر وأقل من ١٠)، (١٠ وأقل من ٢٠) تسمى فئات.

- كل فئة لها حد أدنى وحد أعلى: الصفر هو الحد الأدنى للفئة (صفر وأقل من ١٠)، (١٠) هي الحد الأعلى لهذه الفئة.

- مدى الفئة أو طول الفئة هو الفرق بين الحد الأعلى للفئة والحد الأدنى لها.

مفهوم أساسي

مدى الفئة = الحد الأعلى للفئة – الحد الأدنى لها.

من النشاط السابق

- جد مدى الفئة (٢٠ وأقل من ٣٠).

- ما تكرار هذه الفئة؟ هو (١١) وهي القيم:

٢٠، ٢٢، ٢٧، ٢٣، ٢٦، ٢٢، ٢٣، ٢١، ٢٨، ٢٧ ، ٢٣ تأكد من ذلك.

كتابة الفئة:

يمكن كتابة الفئة (٢٠ وأقل من ٣٠) كما يلي:

أ. (٢٠ – ٣٠) وتقرأ ٢٠ وأقل من ٣٠.

ب. (٢٠ -) تقرأ ٢٠ وأقل من ٣٠.

نشاط (٢)

- جد الحد الأدنى والحد الأعلى للفئة (٢٠ – ٣٠).

- جد منتصف الفئة (٢٠ – ٣٠)

- منتصف الفئة يسمى مركز الفئة حيث أن:

مفهوم أساسي

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى}}{٢}$$

- جد مركز الفئة (٢٠ - ٣٠)

واضح أن مركز الفئة $= \frac{٢٠ + ٣٠}{٢} = ٢٥$

- جد طول الفئة (٢٠ – ٣٠)

نلاحظ أن: طول الفئة = ٣٠ – ٢٠ = ١٠

وأن : $٢٠ + \frac{١٠}{٢} = ٢٥$ = مركز الفئة أيضاً

- جد طول الفئة (٣٠ – ٤٠)

طول الفئة = ٤٠ – ٣٠ = ١٠

مركز الفئة $= \frac{٣٠ + ٤٠}{٢} = \frac{٧٠}{٢} = ٣٥$

لاحظ أن : $٣٠ + \frac{١٠}{٢} = ٣٥$ = مركز الفئة أيضاً

لعلك استنتجت قاعدة أخرى لحساب مركز الفئة كما يلي:

مفهوم أساسي

$$\text{مركز الفئة} = \text{الحد الأدنى للفئة} + \frac{\text{طول الفئة}}{٢}$$

- يعتبر مركز الفئة هو ممثل لكل القيم التي تقع داخل الفئة.

- فإذا كانت القيم الواقعة في الفئة (٢٠ – ٣٠) هي ٢٠، ٢٢، ٢٧، ٢٣، ٢٦،

٢٢، ٢٣، ٢١، ٢٨، ٢٧ فإننا نعتبر أن مركز الفئة وهو (٢٥) يمثل كل الأعداد الواقعة داخل الفئة.

- لذلك نعتبر أن القيمة (٢٥) تكررت (١٠) مرات.

تمرين (١)

(١) ما طول كل من الفئات التالية:

أ. (١٠ - ١٦)

ب. (صفر وأقل من ١٠)

ج. (٥ وأقل من ٨) .

(٢) ما الحد الأدنى والأعلى لكل فئة في السؤال (١) ؟

(٣) جد مركز كل فئة من فئات السؤال(١) ؟

(٤) في البيانات التالية:

٢٥، ٣٠، ١٥، ٤٠، ٤٣، ٣٨

٦، ٣٢، ١٨، ٢٧، ٣٠، ٤٥

٧، ٤١، ٣٢، ١٣، ٣١، ١٩

احسب تكرار كل من الفئات: (٢٥ – ٣٠) ، (٢٠ – ٢٥)

(٧-٢) إنشاء الجدول التكراري ذي الفئات

مما سبق علمنا أن مدى الفئة يساوى الفرق بين الحد الأعلى والأدنى للفئة. فما مدى البيانات؟

مفهوم أساسي

مدى البيانات = الفرق بين أكبر مفردة وأصغر مفردة في البيانات

وعندما يذكر المدى يقصد مدى البيانات.

- احسب مدى البيانات التالية:

٣٧، ٤٤، ٢٠، ٣١، ٢٢، ١٩، ١، ١٢، ٣، ٨

٢٧، ٣٩، ٦، ٣٤، ٤٥، ٣٢، ٢٣، ١٧، ٤٢، ٢٦

١٧، ٣٣، ٣٩، ٤٢، ٣٣، ٤٨، ٨، ١٢، ٢٢، ٣٣

٤١، ١١، ٣٧، ٣٣، ١٦، ٢٣، ٤٦، ٣٤، ٣٢، ٢١

٣٨، ٣٦، ١١، ٢٨، ٢٧، ٤١، ٢٣، ٣٦، ١٨، ٤٢

المدى = أكبر مفردة – أصغر مفردة = ٤٨ – ١ = ٤٧

لإنشاء جدول تكراري ذي فئات للبيانات السابقة نقوم بالخطوات التالية:

١) نحسب المدى بإيجاد الفرق بين أكبر مفردة وأصغر مفردة في البيانات، وتساوي: ٤٨ – ١ = ٤٧

٢) نوجد طول مدى مناسب للفئة:

فإذا أردنا أن نقسم البيانات السابقة إلى عشر فئات فإن

طول الفئة = $\frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}}$ = $\frac{٤٧}{١٠}$ = ٤,٧ ويساوى تقريباً خمسة

تكون الفئات: (٠ – ٥) ، (٥ – ١٠) ، (١٠ – ١٥) ، ... أكمل بقية الفئات.

لاحظ أن أطوال الفئات متساوية.

٣) نضع البيانات في جدول بحيث تكون كل مفردة في الفئة التي تنتمي لها؛ ويمكن تمثيلها بخط مائل مثل (/).

٤) نضع هذه الفئات في جدول تكراري كما يلي؛ حيث أن عدد الفئات = ١٠ وطول كل فئة = ٥

الفئات	المفردات الواقعة عليها (علامات العدّ)	عدد المفردات (التكرارات)
٠ - ٥	//	٢
٥ - ١٠	///	٣
١٠ - ١٥	////	٤
١٥ – ٢٠	~~////~~	٥
٢٠ – ٢٥	~~////~~ //	٧
٢٥ – ٣٠	////	٤
٣٠ – ٣٥	~~////~~ ////	٩
٣٥ – ٤٠	~~////~~ //	٧
٤٠ – ٤٥	~~////~~ /	٦
٤٥ – ٥٠	///	٣
المجموع		٥٠

هذا النوع من الجداول يسمى الجدول التكراري ذا الفئات متساوية الطول . وستقتصر دراستنا على هذا النوع من الجداول.

١) نلاحظ من الجدول أن المفردات الأصلية قد اختفت، فالفئة (٥ – ١٠) تحتوي على ثلاثة مفردات ولكن لا نعرف قيمة كل منها بالتحديد ؛ لذا يُعتبر أن قيمها متساوية، وأن قيمة كل منها تساوي مركز الفئة = $\frac{١٠ + ٥}{٢} = ٧,٥$

وهكذا بالنسبة لبقية مفردات الجدول.

٢) العمود الثاني ضروري في مرحلة تكوين الجدول، إلا أنه لا يظهر في العادة عندما يعرض الجدول بصورته النهائية.

نشاط :

بالرجوع إلى البيانات التي أنشأنا منها الجدول السابق ، خذ عدد الفئات ٥ بدلاً عن ١٠، فيكون:

طول الفئة = $\frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{٤٧}{٥} = ٩,٤ = ١٠$ تقريباً

وتكون الفئات (٠ – ١٠) ، (١٠ – ٢٠) ، (٢٠ – ٣٠)، ... وهكذا

الفئات	المفردات الواقعة عليها	العدد (التكرارات)
٠ –	~~////~~	٥
١٠ –	//// ~~////~~	٩
٢٠ -	/ ~~////~~ ~~////~~	١١
٣٠ -	/ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	١٦
٤٠ -	//// ~~////~~	٩

لاحظ أننا أنشأنا جدولين تكراريين لنفس البيانات.

- ما العلاقة بين عدد الفئات وعدد تكرارات كل فئة؟

- ما العلاقة بين عدد الفئات وأطوال الفئات؟

لاحظ أنه كلما كان عدد التكرارات لكل فئة كبيراً، يقل عدد الفئات ويكون الجدول أكثر سهولة في دراسة البيانات.

• الجدول التكراري التالي يبين درجات طلاب أحد الصفوف في مـــــادةٍ ما (الدرجة القصوى ٣٠ درجة):

الفئات	التكرارت
صفر –	٢
٥ –	٦
١٠ –	٩
١٥ –	١٢
٢٠ –	٧
٢٥ -	٤

بناءً على الجدول السابق أجب عن التالي:

• ما مدى الفئة (طول الفئة) ؟

• ما عدد تلاميذ الصف؟

- كم تلميذاً حصل على أقل من ١٠ درجات؟
- كم تلميذاً حصل على ٢٥ درجة فأكثر؟
- إذا كانت درجة النجاح ١٥ درجة.

فكم عدد الناجحين؟ وكم عدد الراسبين؟

تمرين (٢)

• البيانات التالية تمثل أعمار خمسين عاملاً في أحد المصانع:

٢٠	٤٠	٥٥	٥٠	٢٥	١٤	٤٦	٣١	٤٣	٥١
٤٠	٤٥	٣٠	٣٩	٤٣	٣٤	٤١	٤٤	٥٧	٤٤
٤٩	٢٥	٢٩	٤٠	٣٥	٣٨	٤٢	٥٤	٥١	٢٩
٣٦	٤٨	٤٣	٤٧	٥٥	٥١	٥٤	٥٦	٤١	٢٤
٣٤	٣٣	٥٩	٣٩	٤٨	٣٧	٤٣	٣١	٣٢	٢٨

من البيانات السابقة أجب عن الآتي:

أ. كم عمر أكبر عامل؟

ب. كم عمر أصغر عامل؟

ج. احسب المدى.

د. إذا قسمنا المدى إلى ٨ فئات، فكم يكون طول الفئة بالتقريب؟

هـ. ارسم جدولاً تكرارياً عدد فئاته ٨.

(٢) فيما يلي أطوال ٣٠ شخصاً تم قياسها لأقرب سم.

١٥٧، ١٦١، ١٥١، ١٨٠، ١٦٧، ١٨٨

١٧١، ١٨٢، ١٥٩، ١٧٤، ١٦٦، ١٧٧

١٦٤، ١٧٥، ١٥٥، ١٧٣، ١٦٠، ١٧٩

١٦٥، ١٦٣، ١٧١، ١٨١، ١٧٤، ١٥٨

١٧٧، ١٧٦، ١٥٣، ١٦٨، ١٨٣، ١٧٠

أ. أكمل تمثيل هذه البيانات في الجدول التالي:

فئات الطول	علامات العدّ	التكرارات
١٥٠ ـــ		
١٦٠ـــ		
١٧٠-		
١٨٠-		
١٩٠-		
المجموع		

ب. كم عدد الأشخاص الذين يقل طولهم عن ١٧٠سم؟

ج. كم عدد الأشخاص الذين أطوالهم ١٨٠سم فأكثر؟

د. ما طول الفئة؟

هـ. احسب مركز الفئة (١٨٠ -).

و. ماذا يمثل مجموع التكرارات؟

(٣-٧) تمثيل البيانات الإحصائية بيانياً بواسطة المدرج التكراري

درسنا في الصف الأول المتوسط كيفية تمثيل البيانات في جداول تكرارية كما درسنا تمثيل البيانات بالطرق التالية:

١. التمثيل بالصور

٢. التمثيل بالأعمدة

٣. التمثيل بالقطاعات الدائرية.

وفيما يلي سنتعرف على كيفية تمثيل البيانات بواسطة المدرج التكراري وهو عبارة عن مجموعة من المستطيلات المتلاصقة التي تمثل قاعدة كل منها طول الفئة، وارتفاعه تكرارها.

لرسم المدرج التكراري نتبع الخطوات التالية:

١- ارسم محورين متعامدين، يخصص المحور الأفقي للفئات والمحور الرأسي للتكرارات.

٢- نقسم المحور الأفقي إلى أقسام متساوية بحيث يمثل كل قسم طول الفئة، وبحيث يستوعب جميع الفئات الموجودة.

٣- نقسم المحور الرأسي إلى أقسام متساوية ابتداءً من الصفر، وبحيث يحتوى على أكبر تكرار.

٤- نرسم على كل فئة مستطيلاً ارتفاعه يساوى تكرار الفئة وقاعدته طول الفئة.

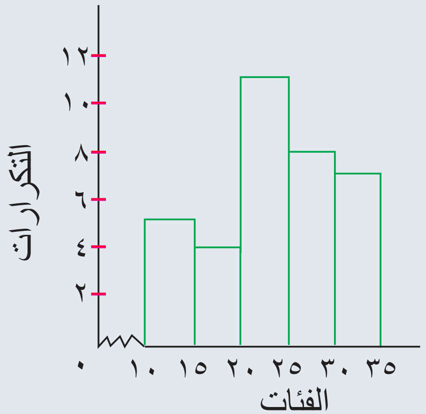
مثال (١):

ارسم مدرجاً تكرارياً لبيانات الجدول التالي:

الفئة	التكرار
١٠ -	٥
١٥ -	٤
٢٠ -	١١
٢٥ -	٨
٣٠ -	٧

الحل :

تمثيل البيانات بالمدرج التكراري:



- الخط المتكسر يعني أنه لا توجد قيمة أقل من ١٠.

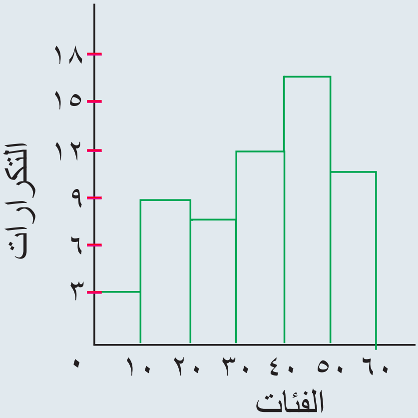
- مقياس الرسم للفئات ١ سم $\equiv$ ٥ وحدات ، التكرارات ١سم $\equiv$ وحدتين

مثال (٢):

ارسم مدرجاً تكرارياً لتمثيل بيانات الجدول التكراري التالي:

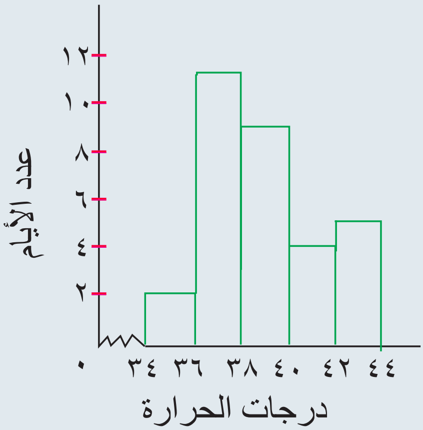
الفئات	٠ -	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -
التكرارات	٣	٩	٨	١٢	١٦	١٠

الحل :



تمرين (٣)

(١) الشكل يمثل درجات الحرارة العظمى خلال شهر مارس ٢٠٢٣ بمدينة الخرطوم



من المدرج التكراري السابق أجب عن الآتي:

أ. ماذا يعني الخط المتكسر؟

ب. ما طول كل فئة من فئات الجدول؟

جـ. كم عدد الأيام التي بها أقل درجة للحرارة؟

د. ما فئة درجة الحرارة التي تقع فيها أغلب أيام الشهر؟

هـ. كوّن الجدول التكراري الذي رسم منه هذا المدرج.

(٢) فيما يلي أوزان ١٢ طفلاً بالكيلو جرام:

٦,٨	٧,٦	٣,٥	٢,٨	٧,٧	٥,٣
٦	٩,٢	٤,٣	٦,٤	٤,٦	٨,٣

أ- أكمل الجدول التكراري التالي لتمثيل البيانات السابقة:

فئة الوزن بالكيلو جرام	٢ -	٤ -	٦ -	٨ - ١٠
التكرار(عدد الأطفال)	٢		٥	

ب- جد عدد الأطفال الذين أوزانهم ٦ كيلو جرام فأكثر.

جـ. ارسم مدرجاً تكرارياً لتمثيل هذه البيانات.

(٣) ادرس الجدول التكراري التالي ثم أجب عن الأسئلة التالية:

الفئة	٠ -	٨ -		٢٤ -	٣٢ – ٤٠	المجموع
التكرار	٥	٧	٨	٦		٣٦

أ. اكتب الفئة المفقودة.

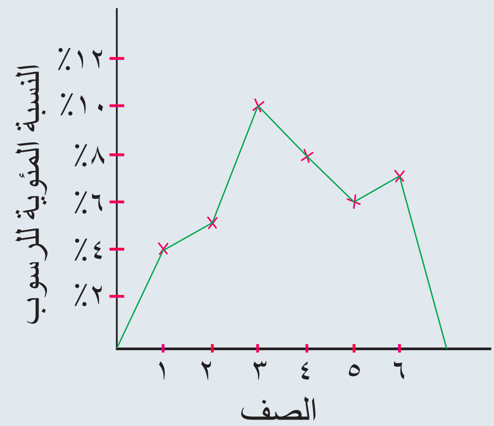
ب. أوجد تكرار الفئة (٣٢ – ٤٠).

جـ. ارسم المدرج التكراري لهذه البيانات.

(٧-٤) تمثيل البيانات الإحصائية بيانياً بواسطة المضلع التكراري

نشاط (١)

الشكل التالي يوضح النسبة المئوية للطلاب الراسبين في كل صف من صفوف المرحلة الابتدائية بمدرسة ما:



أجب عن الأسئلة التالية من الشكل السابق:

١. ما النسبة المئوية للرسوب في الصف الخامس؟

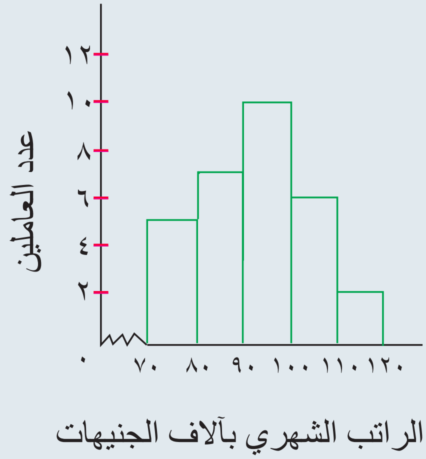
٢. ما الصف الأعلى رسوباً؟

٣. ما الصف الأعلى نجاحاً ؟

٤. ما النسبة المئوية للنجاح في الصف السادس؟

نشاط (٢)

المدرج التكراري التالي يوضح عدد العاملين في إحدى الشركات حسب رواتبهم الشهرية:



أجب عن الأسئلة التالية من المدرج التكراري السابق:

١. ما عدد العاملين الذين تتراوح رواتبهم بين (٨٠ – ٩٠) ألف جنيه.

٢. كم عدد الذين يستلمون أقل راتب؟

٣. على الشكل نفسه:

أ. جد مراكز جميع فئات المدرج التكراري.

ب. كوّن الأزواج (مركز الفئة ، التكرار) مثلاً (٧٥ ، ٥).

جـ . مثّل احداثي كل مركز فئة وتكرارها (مركز الفئة ، التكرار).

د. صل بخطوط مستقيمة النقاط (مركز الفئة ، التكرار).

التمثيل الذي حصلت عليه يسمى المضلع التكراري.

مثال :

ارسم مضلعاً تكرارياً لبيانات الجدول الآتي:

الفئات	٠ -	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ –	٥٠ - ٦٠
التكرارات	٨	٢٠	١٥	٢٥	٢٧	١٢

قم بالخطوات التالية لرسم المضلع التكراري:

(١) جد مراكز الفئات وهي:

(٥، ١٥، ٢٥، ٣٥ ، ٤٥، ٥٥) ثم أضفها للجدول فيصبح كما يلي:

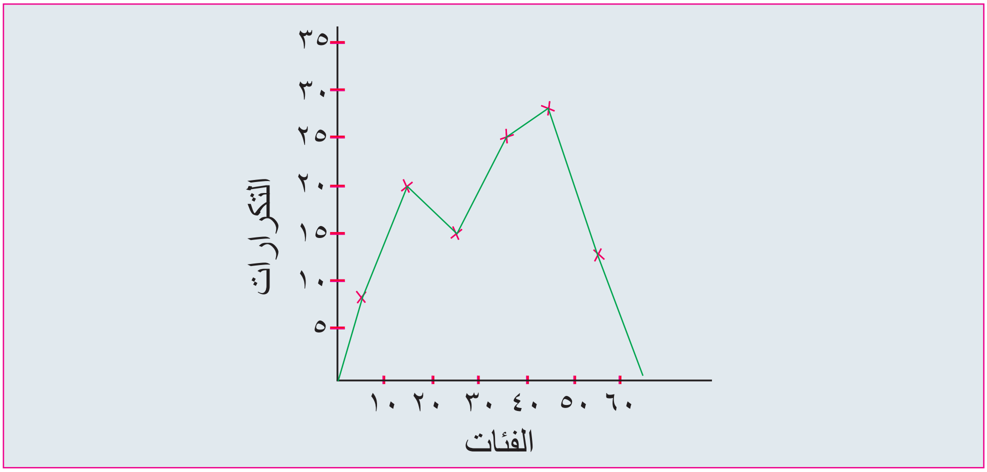
الفئات	٠ -	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ - ٦٠
مراكز الفئات	٥	١٥	٢٥	٣٥	٤٥	٥٥
التكرارات	٨	٢٠	١٥	٢٥	٢٧	١٢

(٢) مثل الفئات على المحور الأفقي (السيني) والتكرارات على المحور الرأسي (الصادي).

(٣) جد النقاط (س، ص) = (مركز الفئة ، التكرار)

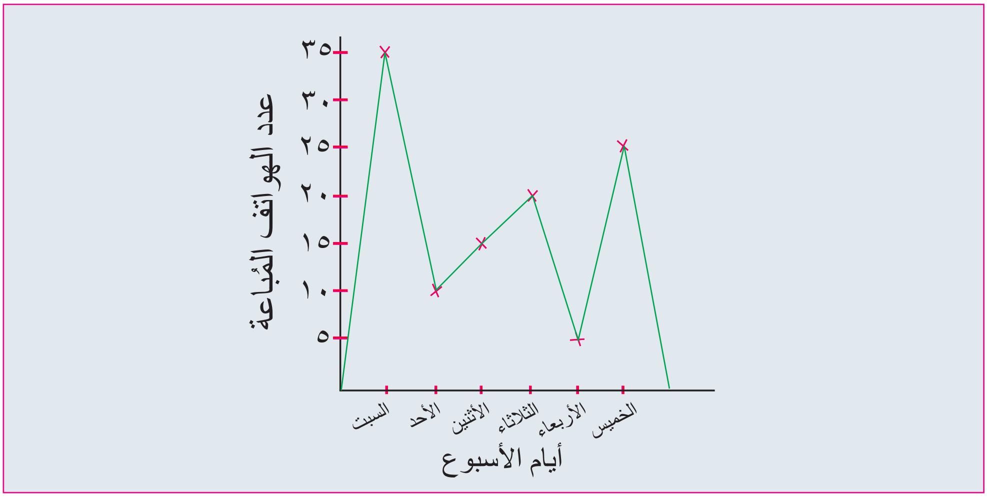
(٥، ٨) ، (١٥، ٢٠) ، (٢٥، ١٥) ، (٣٥، ٢٥) ، (٤٥، ٢٧) ، (٥٥، ١٢)

(٤) صل بين النقاط بخطوط مستقيمة لنحصل على المضلع التكراري .



تمرين (٤)

(١) المضلع التكراري التالي يبيّن عدد الهواتف المبيعة في كل يوم من أيام الأسبوع من أحد المحلات التجارية (الجمعة عطلة).



أجب عن الآتي:

أ. ما أقل عدد من الهواتف بيعت خلال الأسبوع؟

ب. كوّن الجدول التكراري الذي رُسم منه هذا المضلع التكراري.

(٢) ارسم مضلعاً تكرارياً لكل جدول من الجداول التكرارية التالية:

(أكمل مراكز الفئات)

أ.

الفئات	٠ -	٦ -	١٢ -	١٨ -	٢٤ -	٣٠ - ٣٦
مراكز الفئات	٣	٩				
التكرارات	١٥	٢٥	٤٨	٣٠	٣٥	٢٠

ب.

الفئات	٠ -	٤ -	٨ -	١٢ -	١٦ -	٢٠ -	٢٤ - ٢٨
مراكز الفئات	٢						
التكرارات	٢٠	٨	٣٠	٣٦	٢٤	١٨	١٠

(٣) يتم جمع إحصائيات كثيرة لدراسة السكان في أي بلد من البلدان، من هذه الإحصاءات عدد المواليد لكل (١٠٠٠ شخص) ، وهو مؤشر لنمو أعداد السكان.

حسب تقرير إحصاءات السكان. البنك الدولي (استخراج ١٠/ ٥/ ٢٠٢٣) فإن معدل المواليد بالسودان في الفترة من (٢٠١٥ – ٢٠٢١) كما يلي:

السنة	٢٠١٥	٢٠١٦	٢٠١٧	٢٠١٨	٢٠١٩	٢٠٢٠	٢٠٢١
معدل المواليد	٣٦,٤	٣٦	٣٥,٦	٣٥,٢	٣٤,٨	٣٤,٢	٣٣,٥

أ. ارسم مضلعاً تكرارياً لتمثيل هذه البيانات (المحور الأفقي عدد السنوات – والرأسي معدل المواليد).

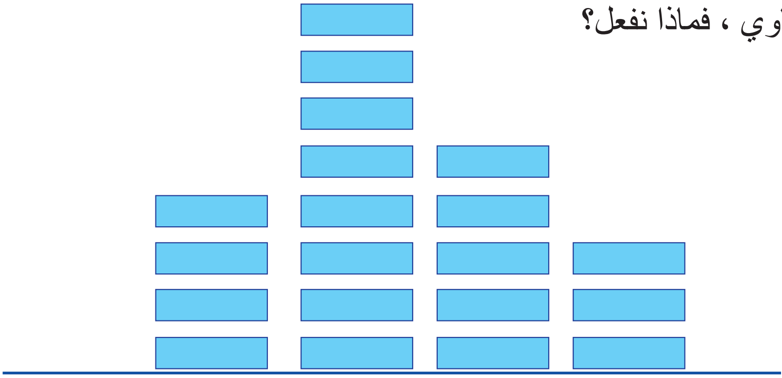
إرشاد: ابدأ المحور الرأسي من ٣٣ واجعل كل ٠,٥ تمثل وحدة عليه.

ب. ماذا تلاحظ من معدل المواليد؟

ج. إذا استمرت أعداد المواليد بهذا المعدل ، ماذا تتوقع؟

(٧-٥) الوسط الحسابي

إذا أردنا نقل ٤ مجموعات من الصناديق الموضحة بالرسم إلى مستودع بواسطة ٤ عمال ، فيمكن أن نكلف كل عامل بنقل مجموعة منها، ولكن إذا أردنا أن نوزع الجهد بينهم بالتساوي ، فماذا نفعل؟



لعلك فكرت في تجميع هذه الصناديق ثم توزيعها عليهم بالتساوي كما يلي:

$$\frac{٣ + ٥ + ٨ + ٤}{٤} = \frac{٢٠}{٤} = ٥$$

فيكون على كل واحد منهم أن ينقل ٥ صناديق.

يسمى العدد ٥ الوسط الحسابي للأعداد ٣، ٥، ٨، ٤ .

إذن ما الوسط الحسابي؟

$$\text{الوسط الحسابي لعدد من القيم} = \frac{\text{مجموع هذه القيم (أو البيانات)}}{\text{عددها}}$$

وبصفة عامة نكتب:

مفهوم أساسي

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عدد البيانات}}$$

حيث أن البيانات تمثل القيم بأنواعها.

مثال (١)

دفع والد زينب لابنته المصروفات التالية خلال خمسة أيام:

اليوم	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	المجموع
المبلغ بالجنيه	٢٠٠	٥٠٠	٢٥٠	٣٠٠	١٥٠	١٤٠٠

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع المصروفات}}{\text{عدد الأيام}}$ = $\frac{١٤٠٠}{٥}$ = ٢٨٠ جنيهاً

أي أنه لو صرفت ٢٨٠ جنيهاً في كل يوم من الأيام الخمس لكان مجموع ما صرفته هو ١٤٠٠ جنيهاً. (٥ × ٢٨٠ = ١٤٠٠)

من المثال السابق نستطيع أن نستنتج أن ما صرفته زينب خلال خمسة أيام هو مصروفها اليومي (الوسط الحسابي) مضروباً في ٥.

∴ مجموع المصروفات = عدد الأيام × الوسط الحسابي

هل نستطيع استنتاج قاعدة لذلك؟

مجموع القيم (أو البيانات) = الوسط الحسابي للبيانات × عدد البيانات

مفهوم أساسي

مجموع البيانات = الوسط الحسابي للبيانات × عدد البيانات

مثال (٢)

مكتوب على علبة كبريت أن متوسط عدد أعداد الكبريت في العلبة هو ٥٠ عوداً. فإذا اشتريت ٦ علب ووجدت أن عدد الأعواد فيها كما يلي: ٤٩، ٥٢، ٥٣، ٤٧، ٥١، ٤٨

فهل يحق لك توجيه اللوم للشركة بإنقاص حقك من أعواد الكبريت؟

الحل :

الوسط الحسابي حسب الشركة = ٥٠ عوداً

كم يلزم أن يكون مجموع أعواد الكبريت في ٦ علب

= ٦ × ٥٠ = ٣٠٠ عوداً (تذكر كيف نحسب مجموع البيانات)

مجموع ما حصلت عليه من أعواد الكبريت

= ٤٩ + ٥٢ + ٥٣ +٤٧ + ٥١ + ٤٨ = ٣٠٠ عوداً

عليه فلا يحق لك توجيه أي لوم على الشركة.

مثال (٣)

درجات (١٠) تلاميذ في أحد الصفوف في مادة ما كانت كما يلي: ١٥، ٢٠، ١٢، ٩، ١١، ٧، ١٠، ١٢، ١٣، ١١ جد الوسط الحسابي لهذه الدرجات.

الحل:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عدد البيانات}} = \frac{١٢٠}{١٠} = ١٢ \text{ درجة}$$

مثال (٤)

اشترى تاجر عدداً من الصناديق البرتقال وأراد أن يحسب متوسط عدد البرتقال في كل صندوق، ففتح ٦ صناديق ووجد أن أعداد البرتقال فيها هي: ٥٧، ٤٦، ٤١، ٤٧، ٤٥، ٥٤

احسب متوسط عدد البرتقال في الصندوق الواحد.

الحل:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{٥٧ + ٤٦ + ٤١ + ٤٧ + ٤٥ + ٥٤}{٦} = \frac{٢٩٠}{٦}$$

$$= ٤٨ \frac{١}{٣}$$

عليه نستطيع أن نقول أن عدد البرتقال في كل صندوق هو (٤٨) برتقالة (تقريباً) لأنه غير المعقول أن تكون هناك ($\frac{١}{٣}$) برتقالة في الصندوق.

تمرين (٥)

(١) سجل أحمد أعمار عشرة أشخاص بالسنوات كما يلي:

١٨، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢٤، ٢٦، ٣٠، ٣٢، ٣٨، ٤٥

أوجد الوسط الحسابي لأعمارهم.

(٢) كانت عدد صفحات القصص التي قرأها أنس خلال أسبوع كما يلي:

١٠، ١٨، ١١، ٦، ٦، ٥، ٧

احسب الوسط الحسابي لعدد الصفحات التي يقرأها يومياً.

(٣) اشترى عمر ٥ قطع حلوى بمبلغ ٨٥٠ جنيهاً ، ثم اشترى بعد ذلك قطعة بمبلغ ٧٥٨ جنيهاً. ما الوسط الحسابي لثمن قطع الحلوى جميعها؟

(٤) عدد الدرجات التي أحرزها أحد الفصول في ٥ مسابقات كانت:

١٢، ١٤، ١١، ١٣، ١٥ . فكم درجة يجب أن يحققها في المسابقة السادسة ليصبح متوسط درجاته ١٤؟

(٧-٦) الوسيط

البيانات التالية تمثل الدرجات التي حصل عليها ٧ طلاب في إحدى المواد:

١٢، ٩، ١٠، ٦، ١٤، ٧، ١٥

إذا رتبنا هذه الدرجات تصاعدياً تصبح:

٦، ٧، ٩، $\boxed{١٠}$، ١٢ ، ١٤، ١٥

- نلاحظ أن عدد القيم الأقل من (١٠) يساوي عدد القيم الأكبر من (١٠).
- ماذا إذا رتبنا هذه القيم تنازلياً؟ هل تتغير القيمة؟
- ماذا تستنتج؟

مفهوم أساسي

الوسيط هو القيمة التي تتوسط القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً

مثال :

أوجد الوسيط لكل مجموعة من القيم فيما يلي:

أ. ١٥، ١٧، ١٣، ١٥، ١١، ٧، ٤

ب. ٢٣، ٢٥، ١٦، ٩، ١٨، ١١، ٢٠، ١٤

الحل:

أ. تصبح القيم بعد ترتيبها كما يلي:

٤، ٧، ١١، $\boxed{١٣}$، ١٥، ١٥، ١٧

الوسيط = ١٣

ب. تصبح القيم بعد الترتيب كما يلي:

٩، ١١، ١٤، $\boxed{١٦، ١٨}$ ، ٢٠، ٢٣، ٢٥

لاحظ أن القيم بعد ترتيبها تتوسطها قيمتان هما ١٦، ١٨ يكون الوسيط في هذه الحالة هو الوسط الحسابي للقيمتين.

أي أن الوسيط = $\frac{١٦ + ١٨}{٢} = \frac{٣٤}{٢} = ١٧$

ماذا تستنتج من المثال السابق؟

مفهوم أساسي

- إذا كان عدد القيم فردياً فتوجد قيمة واحدة تتوسطها وهي قيمة الوسيط.
- إذا كان عدد القيم زوجياً فتوجد قيمتان تتوسط القيم فيكون الوسيط هو الوسط الحسابي لهاتين القيمتين

تمرين(٦)

أوجد الوسيط لكل مجموعة من القيم فيما يلي:

أ. ٤٥، ٣٣، ٢٠، ٣٩، ١٧، ٢٥، ٢٢

ب. ١٤، ١٢، ٢٠، ١٣، ٧، ٢١، ١١، ١٢

ج. ٧,٣ ، ٢,٥ ، ٩,٤ ، ١١,٧ ، ١٣,٩

(٧-٧) المنوال

- البيانات التالية عبارة عن إنتاجية أبقار في مزرعة ما بالأرطال خلال أسبوع:

١٠٤، ١٠٠، ٩٩، ١٠٠، ١٠١، ١٠٠، ١٠٢

ما القيمة التي تكررت أكثر من غيرها بين الإنتاج الأسبوعي للألبان؟

- من الواضح أن القيمة الأكثر شيوعاً وانتشاراً من غيرها هي (١٠٠) ؛ فقد تكررت ثلاثة مرات. تسمى هذه القيمة المنوال.

مفهوم أساسي

المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر شيوعاً أو تكراراً.

لذا يمكن اعتبار أنّ الإنتاج اليومي لهذه المزرعة (١٠٠) رطل يومياً.

مثال (١)

جد المنوال لكلٍ مما يلي:

١. ٣، ٥، ٦، ٧، ٥، ٦، ٥، ٧

٢. ١٦، ١٢، ١٦، ٢٣، ٢٥، ٣٥، ١٢، ١٦

٣. ٤٨، ٤٥، ٣٥، ٣٧، ٥٣، ١٣

الحل:

١. في المجموعة الأولى فإن المنوال = ٥ لأنها القيمة التي تكررت أكثر من غيرها.

٢. في المجموعة الثانية نجد أن القيمة (١٢) تكررت مرتين، بينما تكررت القيمة (١٦) ٣ مرات، لذا فإن المنوال = (١٦) لأنها تكررت أكثر من غيرها.

٣. في المجموعة الثالثة لا يوجد منوال لأنه لا توجد قيمة تكررت أكثر من غيرها.

مثال (٢)

الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لأعمار ٣٠ شخصاً.

جد المنوال.

العمر بالسنوات	٢٠	٢٥	٣٣	٣٨	٣٩	٤٠	المجموع
التكرار	٤	٧	٨	٦	٣	٢	٣٠

الحل:

المنوال = ٣٣، لماذا؟ (لأنه تكرر أكثر من غيره) .

أما في حالة الجدول التكراري ذي الفئات فإن:

مفهوم أساسي

الفئة المنوالية هي الفئة التي تقابل أكثر تكرار. ويمثل المنوال مركز هذه الفئة المنوالية.

تمرين(٧)

(١) جد المنوال للبيانات التالية:

٣٧، ٤٢، ٣٨، ٣٥، ٤٢، ٣٦

(٢) من البيانات: ٩، ٨، ١٠، ١٠، ١٣، ١٢، ١٥

١/ جد: أ/ المنوال ب/ الوسيط ج/ الوسط الحسابي

٢/ إذا استبدلنا القيمة (١٢) بالقيمة (١٩)

جد: أ/ المنوال ب/ الوسيط ج/ الوسط الحسابي

(٣) الجدول يبين عدد الكتب المبيعة خلال أسبوع في إحدى المكتبات.

اليوم	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
عدد الكتب	٩٦	٥٥	٣٤	٣٦	٣٤	٥٧	٧٢

جد لهذه البيانات:

أ. المنوال.

ب. الوسيط.

(٤) الجدول يبين مدة التدريب بالدقيقة لفريق رياضي مكوّن من (٣٠) فرداً.

الفئة (بالدقائق)	٨٠ -	١٠٠ -	١٢٠ -	١٤٠ -	١٦٠ -	١٨٠ - ٢٠٠
التكرار (عدد اللاعبين)	٦	٥	٨	٧	٣	١

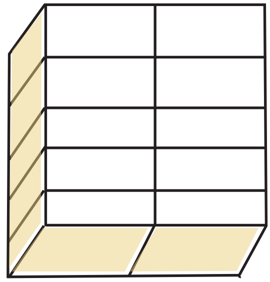
- احسب المنوال لهذا التوزيع.
- فسر ما المقصود بالمنوال هنا؟

الوحدة الثامنة

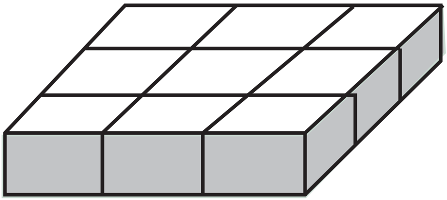
الحجوم

(٨ـ١) مفهوم الحجم ووحدة قياسه

تعرفنا سابقاً أن كل ما يشغل حيزاً من الفراغ يسمّى مجسّماً.



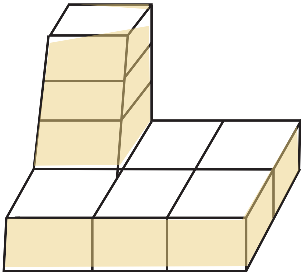
الشكل (١)



الشكل (٢)

نشاط :

مستخدماً علب الكبريت أو مكعّب الألعاب أو صناديق صغيرة صمّم مجسّماً كما في الأشكال المقابلة. ماذا تلاحظ ؟



الشكل (٣)

نلاحظ أنّ:

المجسّمات التي تمّ تكوينها من علب الكبريت كما في الشكل (١) أو مكعّبات الألعاب كما في الشكل (٢) أو من الصناديق كما في الشكل (٣) شغلت حيزاً من الفراغ وأن هذا الحيز الذي شغلته يُسمّى حجماً.

مفهوم أساسي

الحجم هو مقدار الحيز الذي يشغله الجسم (المجسّم) في الفراغ.

أكمل:

حجم الشكل (١) = ... علبة كبريت.

حجم الشكل (٢) = ... مكعّب ألعاب.

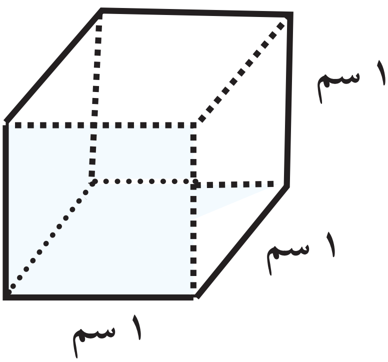
حجم الشكل (٣) = ... صندوق.

الوحدات السابقة (علبة كبريت، مكعّب ألعاب، صندوق) ليست وحدات متفق عليها عالمياً لقياس الحجم، لأن حجم المجسّم يختلف باختلاف الوحدة المستخدمة لقياسه ويختلف باختلاف الشخص الذي يستخدمها.

لذلك كان لابد من الحصول على وحدات قياس ثابتة متفق عليها عالمياً لقياس الحجم.

وقد اتفق على أن يكون المكعّب الذي طول حرفه (١ سم) هو وحدة قياس الحجم ويُسمّى السنتيمتر المكعّب ويرمز له بالرمز سم^{٣}

(لأن الحجم له ثلاثة أبعاد وهي الطول والعرض والارتفاع)



وهنالك وحدات أخرى للحجوم الكبيرة وهي الديسيمتر المكعّب (ديسم^{٣}) أو المتر المكعّب (متر^{٣}) أو (م^{٣}).

وأيضاً في حالة الحجوم الصغيرة توجد وحدات أخرى وهي المليمتر المكعّب (مم^{٣}).

التحويل بين وحدات الحجم:

تعرفنا سابقاً التحويل بين وحدات الطول حيث أنّ:

١ سنتمتر (سم) = ١٠ مليمتر (مم)

١ ديسيمتر (ديسم) = ١٠ سنتمتر (سم)

١ متر (م) = ١٠ ديسيمتر (ديسم)

وللتحويل بين وحدات الحجم نجد أنّ:

× ١٠٠٠

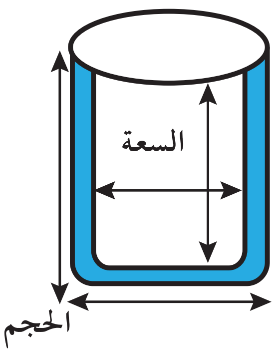
١ سم^{٣} = ١ سم × ١ سم × ١ سم = ١٠ مم × ١٠ مم × ١٠ مم = ١٠٠٠ مم^{٣}

١ ديسم^{٣} = ١ ديسم × ١ ديسم × ١ ديسم = ١٠ سم × ١٠ سم × ١٠ سم = ١٠٠٠ سم^{٣}

١ م^{٣} = ١ م × ١ م × ١ م = ١٠ ديسم × ١٠ ديسم × ١٠ ديسم = ١٠٠٠ ديسم^{٣}

÷ ١٠٠٠

الفرق بين السعة والحجم:



لاحظ حافظة الماء أو زير الماء الموجودة في المنزل أو المدرسة.

ما الفرق بين سعتها وحجمها ؟

نلاحظ أن سعة الحافظة من الداخل تختلف عن حجم الحافظة.

حيث درست سابقاً أن السعة هي حجم الفراغ الداخلي لأي جسم.

وعليه إذا أردنا ايجاد سعة الحافظة فإننا نقيس حجم الفراغ الداخلي فقط، وإذا أردنا قياس حجمها فإننا نقيس الحيز الذي تشغله الحافظة في الفراغ كاملاً. حيث أن وحدة قياس السعة هي اللتر = ديسم^{٣} = ١٠٠٠ سم^{٣}

تمرين (١)

حوّل بين الوحدات الآتية:

١) ٣ م^{٣} = ... ديسم^{٣}

٢) ٥ م^{٣} = ... سم^{٣}

٣) ٦ ديسم^{٣} = ... مم^{٣}

٤) ٨٠٠٠٠ مم^{٣} = ... سم^{٣}

٥) ١٢٠٠٠٠٠٠ مم^{٣} = ... ديسم^{٣}

٦) ٥٠٠ سم^{٣} = ... ديسم^{٣}

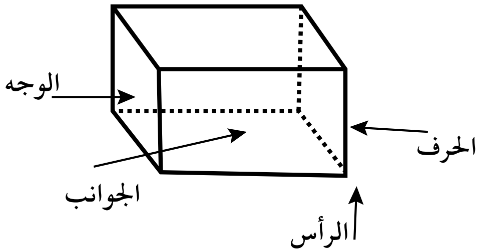
٧) ٢ م^{٣} = ... مم^{٣}

٨) ٥ لتر = ... مم^{٣}

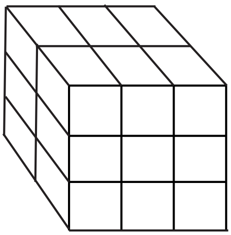
(٨–٢) حجم المنشور (متوازي المستطيلات)

درسنا سابقاً المنشور القائم وعرّفناه أنه مجسّم قاعدتاه مضلّعان متوازيان ومتطابقان وكل وجه فيه مستطيل.

وعرّفنا أيضاً أن متوازي المستطيلات هو شكل ثلاثي الأبعاد له ٦ أوجه كل منها مستطيل وكل وجهين متقابلين متساويان في المساحة ومتوازيان.



وفي هذا الدرس سوف ندرس حجم المنشور (متوازي المستطيلات)



نشاط:

حجم متوازي المستطيلات المقابل يساوي ١٨ وحدة مكعّبة.

كوّن ثلاثة أشكال مختلفة لمتوازي مستطيلات حجم كل منها ١٨ وحدة مكعّبة.

ثم املأ الجدول أدناه:

متوازي المستطيلات	الطول (وحدة)	العرض (وحدة)	الارتفاع (وحدة)	مساحة القاعدة (وحدة مربعة)
أ	٣	٢	٣	٦
ب				
جـ				
د				

- ما العلاقة بين حجم متوازي المستطيلات (ح) وأبعاده الثلاثة: الطول (ل) والعرض (ض) والارتفاع (ع) ؟ ماذا تلاحظ ؟
- ما العلاقة بين حجم متوازي المستطيلات (ح) من جهة ومساحة القاعدة (م) والارتفاع (ع) من جهة أخرى ؟ ماذا تلاحظ ؟

مما سبق نلاحظ أنّ:

١) حجم متوازي المستطيلات (ح) = الطول (ل) × العرض (ض) × الارتفاع (ع)

٢) حجم متوازي المستطيلات (ح) = مساحة القاعدة (م) × الارتفاع (ع)

وبصورة عامة:

مفهوم أساسي

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

أي أن ح = م × ع

مثال (١):

متوازي مستطيلات طوله ٥ سم وعرضه ٢ سم وارتفاعه ٧ سم. جد حجمه.

الحل:

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

= ٥ × ٢ × ٧ = ٧٠ سم^{٣}

أو:

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحة القاعدة = الطول × العرض = ٥ × ٢ = ١٠ سم^{٢}

∴ الحجم = ١٠ × ٧ = ٧٠ سم^{٣}

مثال (٢):

متوازي مستطيلات حجمه ٩٦ سم^{٣} وطوله ٨ سم وارتفاعه ٣ سم. جد مساحة قاعدته وعرضه.

الحل:

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

٩٦ = مساحة القاعدة × ٣

$\therefore$ مساحة القاعدة = $\frac{٩٦}{٣}$ = ٣٢ سم^{٢}

وبما أنّ مساحة القاعدة = الطول × العرض

$\therefore$ ٣٢ = ٨ × العرض

$\therefore$ العرض = $\frac{٣٢}{٨}$ = ٤ سم

مثال (٣):

أراد عامل طوب أن يصنع ١٠٠٠٠ طوبة من الطين، احسب كمية التراب التي يحتاجها بالمتر المكعّب. إذا كان قالب الطوب على شكل متوازي مستطيلات أبعاده من الداخل ٥، ٩، ١٨ بالسنتمترات [اعتبر أنّ الفراغات بين جزيئات الطين تساوي الفراغات بين جزيئات التراب]

الحل:

حجم الطوبة الواحدة = ٥ × ٩ × ١٨ = ٨١٠ سم^{٣}

حجم الـ ١٠٠٠٠ طوبة = ٨١٠ × ١٠٠٠٠ = ٨١٠٠٠٠٠ سم^{٣}

حجم التراب بالمتر المكعّب = $\frac{٨١٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠٠٠}$ = ٨,١ م^{٣}

أسئلة للنقاش:

١) برأيك لماذا اعتبرنا أنّ الفراغات بين جزيئات الطين تساوي الفراغات بين جزيئات التراب ؟

٢) قدّر كمية التراب التي يحتاجها بشكل أدق. ولماذا ؟

مثال (٤):

إناء على شكل متوازي مستطيلات أبعاده من الداخل كالآتي :

الطول ٣٠ سم، العرض ٢٥ سم، الارتفاع ٥٠ سم، صُبّ به ١١٢٥٠ سم^{٣} من الماء.

جد الآتي:

١) ارتفاع الماء في الإناء.

٢) حجم الماء الذي يلزم إضافته لملء الإناء تماماً.

الحل:

أ. الماء بعد صبّه في الإناء يأخذ شكل متوازي مستطيلات

حجم الماء بالإناء = مساحة القاعدة × الارتفاع

وبما أن مساحة القاعدة = ٣٠ × ٢٥ = ٧٥٠ سم^{٢}

$\therefore$ ١١٢٥٠ = ٧٥٠ × الارتفاع

$\therefore$ الارتفاع = $\frac{١١٢٥٠}{٧٥٠}$ = ١٥ سم

أي أن ارتفاع الماء في الإناء بعد صب ١١٢٥٠ سم٣ هو ١٥ سم

ب) حجم الماء الذي يلزم إضافته لملء الإناء تماماً = حجم الإناء – حجم الماء الموجود

حجم الإناء كله = ٣٠ × ٢٥ × ٥٠ = ٣٧٥٠٠ سم٣

حجم الماء الموجود = ١١٢٥٠ سم٣

$\therefore$ حجم الماء الذي يلزم إضافته لملء الإناء = ٣٧٥٠٠ – ١١٢٥٠ = ٢٦٢٥٠ سم٣

حل آخر:

حجم الماء الذي يلزم إضافته = ٣٠ × ٢٥ × (٥٠ – ١٥)

= ٣٠ × ٢٥ × ٣٥ = ٢٦٢٥٠ سم٣

تمرين (٢)

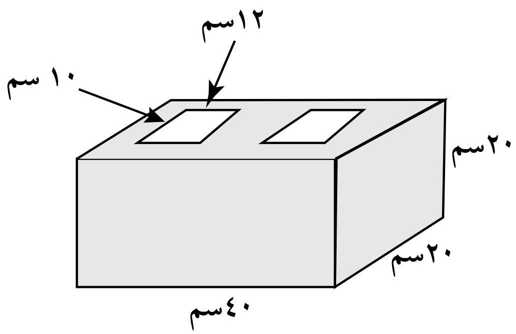
١) جد المطلوب في الجدول أدناه:

متوازي المستطيلات	الطول	العرض	الارتفاع	الحجم
أ	٧ سم	٣ سم	٨ سم	....
ب	....	٤ م	٦ م	١٩٢ م^{٣}
جـ	٦,٣ ديسم	....	٢,٥ ديسم	١٥,٧٥ ديسم^{٣}
د	٢,٧ سم	٦ مم	....	١٦٢٠ مم^{٣}

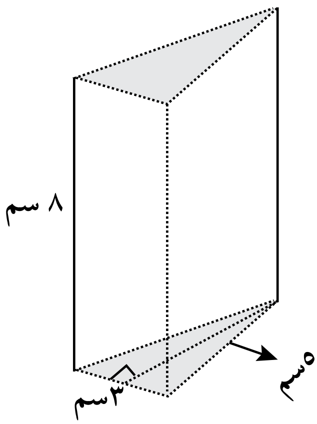
٢) علبة عصير على شكل متوازي مستطيلات قاعدتها مربعة طول ضلعها من الداخل ٥ سم وارتفاعها ١٠ سم جد حجم العصير الذي يملأ هذه العلبة.

٣) كرتونة على شكل متوازي مستطيلات أبعادها من الداخل ٥٠، ٤٠، ٣٠ بالسنتمترات، كم قطعة صابون يمكن وضعها داخل الكرتونة لتمتلئ تماماً إذا كان أبعاد قطعة الصابون هي ١٠، ٥، ٣ بالسنتمترات.

٤) قالب طوب بناء خرساني على شكل متوازي مستطيلات فيه ثقبان متساويان كما في الشكل جانبه، ما حجم مادة الخرسانة في طوبة البناء ؟



٥) من الشكل:



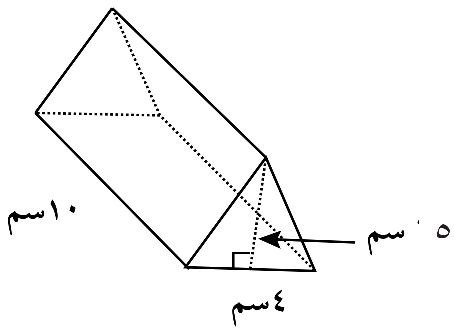
أ- جد حجم المنشور الثلاثي المقابل.

ب- استنتج قانوناً عاماً لحساب حجم المنشور الثلاثي.

تذكر أنّ:

(قاعدتي المنشور الثلاثي تكونان دائماً على شكل مثلث)

٦) اكتشف الخطأ: أوجدت كل من لميس وهبة حجم المنشور المقابل، فأيهما توصلت للإجابة الصحيحة ؟ ولماذا ؟



لميس :

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

= (٤ × ١٠) × ٥ = ٢٠٠ سم^{٣}

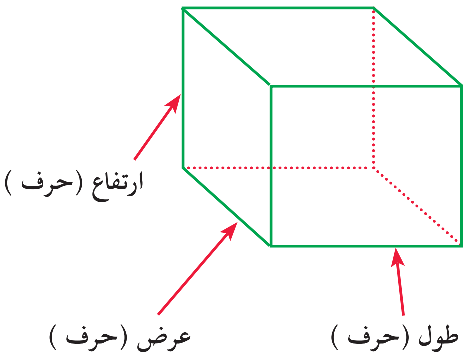
هبة :

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ($\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٥) × ١٠ = ١٠٠ سم^{٣}

٧) هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة (إذا تساوى حجما متوازيي مستطيلين فإنه يكون لهما نفس مساحة السطح الكلية) فسّر إجابتك بإعطاء أمثلة.

(٨ ـ٣) حجم المكعّب



تعرّفنا سابقاً أنّ المكعّب هو شكل ثلاثي الأبعاد يتكوّن من ٦ أوجه كلها مربعات متطابقة و١٢حرفاً متساوياً في الطول و٨ رؤوس.

وتعرّفنا أيضاً أنّ المكعّب هو حالة خاصة من متوازي المستطيلات عندما يكون (طوله = عرضه = ارتفاعه).

أي أنّ المكعّب هو متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة متساوية.

وعليه:

بما أنّ: حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

وفي المكعّب : الطول = العرض = الارتفاع = طول الحرف

مفهوم أساسي

∴ حجم المكعّب = طول الحرف × طول الحرف × طول الحرف

أو حجم المكعّب = مساحة القاعدة × الارتفاع

مثال (١):

جد حجم مكعّب طول حرفه ٦ سم.

الحل:

حجم المكعّب = طول الحرف × طول الحرف × طول الحرف

= ٦ × ٦ × ٦ = ٢١٦ سم^{٣}

مثال (٢):

مكعّب مجموع أطوال أحرفه = ٦٠ سم. جد حجمه.

الحل:

المكعّب له ١٢ حرفاً متساوية

$\therefore$ طول حرف المكعّب = $\frac{٦٠}{١٢}$ = ٥ سم

$\therefore$ حجم المكعّب = ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥ سم^{٣}

مثال (٣):

مكعّب مساحته الجانبية ١٩٦سم^{٢} جد الآتي:

١) مساحة الوجه الواحد.

٢) طول حرفه.

٣) حجم المكعّب.

الحل:

١) المساحة الجانبية للمكعّب = ٤ × مساحة الوجه الواحد

$\therefore$ مساحة الوجه الواحد = $\frac{\text{المساحة الجانبية للمكعّب}}{٤}$

$\therefore$ مساحة الوجه الواحد = $\frac{١٩٦}{٤}$ = ٤٩ سم^{٢}

٢) مساحة الوجه الواحد = طول الحرف × نفسه = (طول الحرف)^{٢}

∴ طول الحرف = $\sqrt{\text{مساحة الوجه الواحد}}$

∴ طول الحرف = $\sqrt{٤٩}$ = ٧ سم

٣) حجم المكعّب = ٧ × ٧ × ٧ = ٣٤٣ سم^{٣}

مثال (٤):

مكعّب من المعدن طول حرفه ٤ سم. يراد صهره وتحويله إلى سبائك، كل سبيكة على شكل متوازي مستطيلات أبعادها كالآتي: طولها ٤ سم وعرضها ١ سم وارتفاعها ٢ سم. جد عدد السبائك التي يتم الحصول عليها.

الحل:

حجم مكعّب المعدن = ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤ سم^{٣}

حجم السبيكة المطلوبة = ٤ × ١ × ٢ = ٨ سم^{٣}

عدد السبائك الناتجة = $\frac{\text{حجم مكعّب المعدن}}{\text{حجم السبيكة المطلوبة}}$ = $\frac{٦٤}{٨}$ = ٨ سبائك

تمرين (٣)

١) جد حجم مكعّب طول حرفه ٣ سم.

٢) مكعّب حجمه ٥١٢ مم^{٣}. جد ارتفاعه.

٣) مكعب محيط أحد أوجهه الجانبية ٢٨ سم. جد حجمه.

٤) جد حجم مكعّب مساحة سطحه الكلية ٥٤ م^{٢}.

٥) مكعّب جبن طول حرفه ١٢ سم يراد تقسيمه إلى مكعّبات صغيرة طول حرف كلٍ منها ٤ سم لتقديمها ضمن أحدى الوجبات. جد عدد مكعّبات الجبن الصغيرة الناتجة.

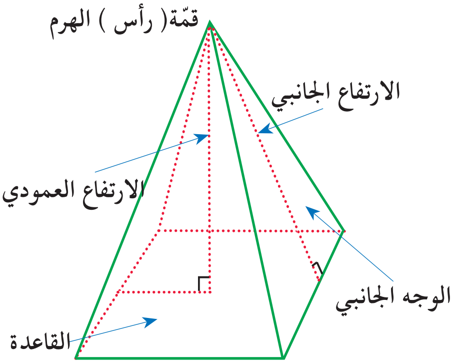
٦) حوض من الحديد مكعّب الشكل له غطاء، طول حرفه الداخلي ١٠٠ سم. جد حجم الحديد المصنوع منه هذا الحوض، إذا كان سُمك الحديد $\frac{١}{٢}$ سم.

٧) نلاحظ في السودان قديماً كان أغلبية صهاريج محطات المياه على شكل مكعّب. برأيك هل تصميمها على هذا الشكل عملية مقصودة ؟ لماذا لم يتم تصميمها على شكل متوازي مستطيلات ؟ أدعم إجابتك بأمثلة عددية.

[الصهريج في بعض الولايات يُسمى الدونكي]

(٨-٤) حجم الهرم

درست سابقاً الأشكال ثلاثية الأبعاد (المجسمات) وعرّفنا الهرم المنتظم هو شكل ثلاثي الأبعاد قاعدته على شكل مضلّع منتظم وأوجهه الجانبية تتكون من مثلثات متطابقة ومتساوية الساقين تتلاقى رؤوسها في نقطة واحدة تُسمّى قمة الهرم.



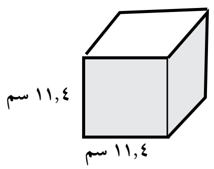
حيث يُسمّى الهرم بناءً على شكل قاعدته فإذا كانت مثلث سُمّي الهرم ثلاثياً وإذا كانت رباعية سُمّي الهرم رباعياً وهكذا.

وبصورة عامة الهرم هو شكل ثلاثي الأبعاد (مجسم) قاعدته الوحيدة مضلع وأوجهه الجانبية مثلثات وفي هذا الدرس سوف نقوم بدراسة حجم الهرم.

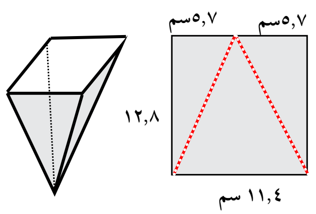
نشاط:

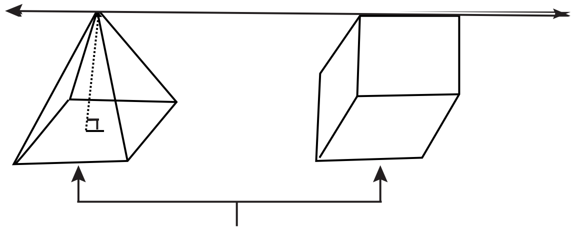
في هذا النشاط يتم استنتاج حجم الهرم من خلال حجم المكعّب بحيث تتساوى فيهما مساحة القاعدة والارتفاع العمودي.

١) صمّم مكعّباً من الكرتون بطول حرف ١١,٤ سم مفتوحاً من الأعلى.



٢) صمّم هرماً من الكرتون مفتوح من أعلى بواسطة ٤ مثلثات متطابقة ومتساوية الساقين.





٣) تأكد من تطابق قاعدة المكعّب مع قاعدة الهرم.

٤) تأكد من تساوي ارتفاع المكعّب مع الارتفاع العمودي للهرم.

٥) املأ الهرم بالرمل وامسح أعلاه بمسطرة لتسوية السطح.

٦) فرّغ الرمل في المكعّب وكرّر العملية حتى يمتلئ المكعّب.

كم مرة قمت بتعبئة الهرم لملء المكعّب؟ ماذا تلاحظ؟

نلاحظ الآتي:

حجم المكعّب = ٣ مرات من حجم الهرم

أي أنّ : حجم المكعّب = ٣ حجم الهرم.

$\therefore$ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × حجم المكعّب

وبما أنّ: حجم المكعّب = مساحة القاعدة × الارتفاع

مفهوم أساسي

$\therefore$ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

مثال (١):

هرم مساحة قاعدته ١٦سم^{٢} وارتفاعه ٩ سم جد حجمه.

الحل:

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ١٦ × ٩ = ٤٨ سم^{٣}

∴ حجم الهرم = ٤٨ سم^{٣}

مثال (٢) :

هرم ارتفاعه ٦ متر وقاعدته مربع طول ضلعه ٢ متر جد حجمه.

الحل:

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحة القاعدة = ٢ × ٢ = ٤ م^{٢}

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × ٤ × ٦ = ٨ م^{٣}

مثال (٣) :

هرم حجمه ٦٠م^{٣} وارتفاعه ١٠ متر جد مساحة قاعدته.

الحل:

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

٦٠ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ١٠

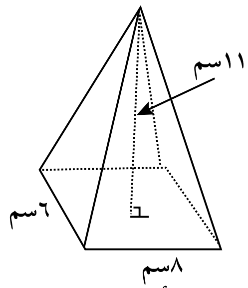
∴ مساحة القاعدة = ١٨م^{٢}

تمرين (٤)

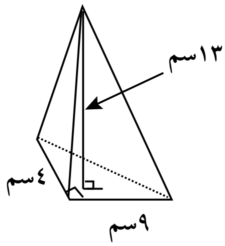
١) جد حجم الهرم الذي مساحة قاعدته ١٢سم^{٢} وارتفاعه ٧ سم.

٢) صنعت فاطمة شمعة على شكل هرم حجمها ٨٦٤ سم^{٣} ومساحة قاعدتها ١٤٤ سم^{٢}.
فما ارتفاعها ؟

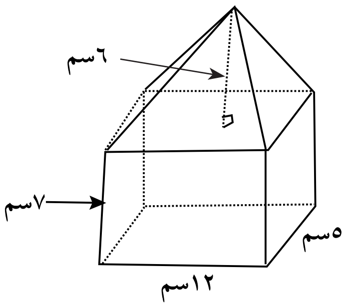
٣) جد حجم الأشكال الآتية:



(أ)



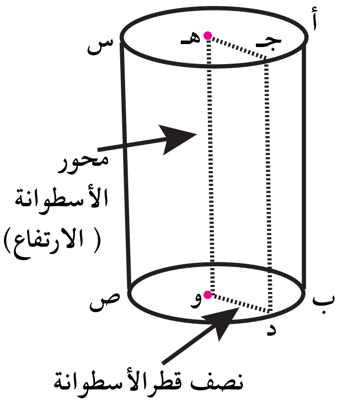
(ب)



(جـ)

(٨ ـ ٥) حجم الأسطوانة

تعرّفنا سابقاً أنّ:



- الأسطوانة شكل ثلاثي الأبعاد له ارتفاع وقاعدتان فقط.
- القاعدتان عبارة عن دائرتين متطابقتين.
- ليس لها رؤوس أو أحرف.
- هـ و يسمّى محور الأسطوانة. ويسمّى أيضاً الارتفاع.
- يسمّى أ ب ، جـ د ، هـ و ، س ص الارتفاع (ع) حيث

أ ب = جـ د = هـ و = س ص

تُعد الأسطوانة من عائلة المنشور ولكن قاعدتها الدائرية تتكوّن من عدد كبير جداً من الأضلاع ويكون عندها الضلع صغير جداً ولذلك نعتبر أنّ القاعدة الدائرية هي مضلع. وبالتالي يكون حجم الأسطوانة هو نفسه حجم المنشور.

وبما أنّ:

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

$\therefore$ حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

ولكن مساحة القاعدة = π نق^2

مفهوم أساسي

$\therefore$ حجم الأسطوانة = π نق^2 × ع

مثال (١) :

أسطوانة نصف قطرها ١٠ سم وارتفاعها ١٥ سم. جد حجمها.

الحل:

حجم الأسطوانة $= \pi$ نق$^2 \times$ ع

$= ٣,١٤ \times (١٠)^2 \times ١٥ = ٤٧١٠$ سم^3

مثال (٢) :

أسطوانة حجمها ٥٠٧ سم^3 ونصف قطرها ٦ سم. جد ارتفاعها.

الحل:

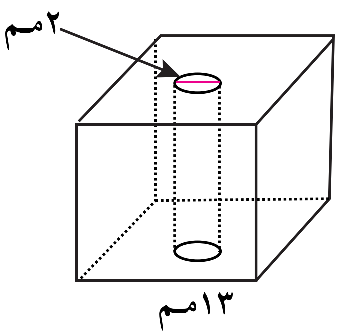
ح $= \pi$ نق^{2}ع

$٥٠٧ = ٣,١٤ \times (٦)^2 \times$ ع

$\therefore$ ع $= \dfrac{٥٠٧}{٣,١٤ \times ٣٦} = ٤,٤٩$ سم

مثال (٣) :

تستخدم هالة خرزاً مكعّب الشكل لصنع عِقد وكل خرزة لها ثقب أسطواني في وسطها. جد حجم الخرزة.



الحل:

الشكل الأول : مكعّب: طول حرفه ١٣ مم

حجم المكعّب = طول الحرف × طول الحرف × طول الحرف

= ١٣ × ١٣ × ١٣ = ٢١٩٧ مم^{٣}

الشكل الثاني : أسطوانة: طول قطرها ٢ مم وارتفاعها ١٣ مم

حجم الأسطوانة = π نق^{٢} × ع

حجم الأسطوانة = ٣,١٤ × (١)^{٢} × ١٣ = ٤٠,٨ مم^{٣}

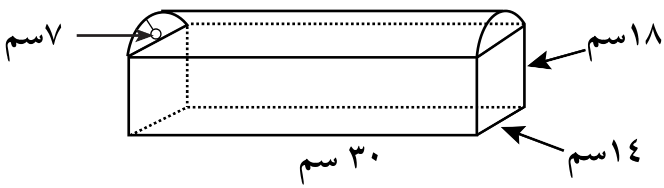
∴ حجم الخرزة = ٢١٩٧ – ٤٠,٨ = ٢١٥٦,٢ مم^{٣}

تمرين (٥)

١) جد المطلوب في الجدول أدناه:

الرقم	نصف قطر القاعدة	مساحة القاعدة	ارتفاع الأسطوانة	حجم الأسطوانة
أ	٣ سم	.... سم^{٢}	٤ سم	.... سم^{٣}
ب	.... م	٢٠ م^{٢}	٢,٥ م	.... م^{٣}
جـ	.... مم	.... مم^{٢}	١٦ مم	١٠٤٤ مم^{٣}

٢) جد حجم صندوق المجوهرات أدناه:



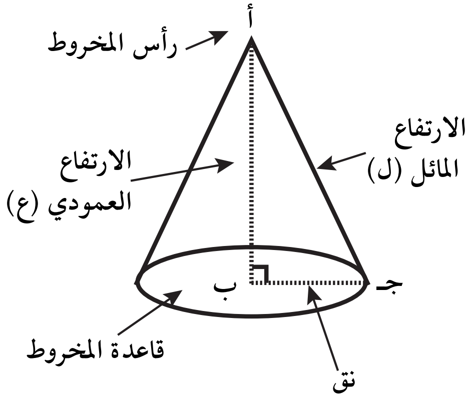
٣) أسطوانتان ارتفاع الأولى ١٠ سم ونصف قطرها ٥ سم، وارتفاع الثانية ٥ سم ونصف قطرها ١٠ سم. أي الأسطوانتين أكبر من حيث الحجم.

٤) نلاحظ الآن في بعض المنازل أنّ أغلب صهاريج المياه على شكل أسطواني. برأيك لماذا اتجهت شركات تصنيع الصهاريج إلى الشكل الأسطواني ؟ هل هي عملية مقصودة ؟ بالرغم من أنه قديماً كانت الصهاريج على شكل مكعّب.

ادعم إجابتك بأمثلة عددية.

٥) أي الحالتين يزداد عندها حجم الأسطوانة بشكل أكبر مضاعفة نصف القطر مرة أم مضاعفة الارتفاع مرة ؟ فسّر إجابتك.

(٨ – ٦) حجم المخروط:



تعرّفنا سابقاً أنّ المخروط شكل ثلاثي الأبعاد له قاعدة دائرية واحدة وسطح مقوس يصل القاعدة بالرأس.

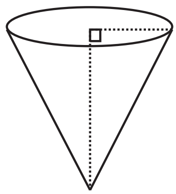
يُسمى $\overline{\text{أ ب}}$ الارتفاع العمودي (ع)

ويُسمى $\overline{\text{أ جـ}}$ بالارتفاع المائل (ل)

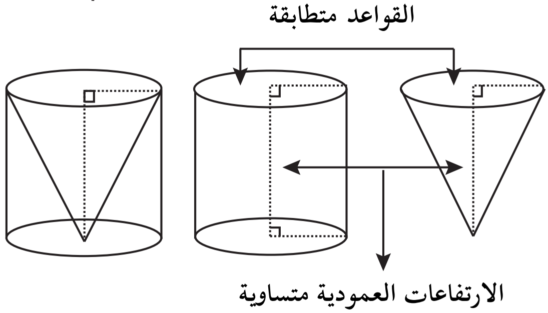
نشاط :

في هذا النشاط سوف نستقصى العلاقة بين حجمي المخروط والأسطوانة تتساوي فيهما مساحة القاعدة والارتفاع العمودي.

١) صمم مخروطاً من الورق المقوى مفتوحاً من أعلى بارتفاع عمودي مناسب ومساحة قاعدة مناسبة.



٢) صمم أسطوانة من الورق المقوى مفتوحة من أعلى بحيث تتطابق قاعدتها الدائرية مع قاعدة المخروط، ويتساوى ارتفاعها العمودي مع الارتفاع العمودي للمخروط.



٣) املأ المخروط بالرمل وامسح أعلاه لتسوية السطح.

٤) فرّغ الرمل في الأسطوانة وكرر العملية حتى تمتلئ الأسطوانة.

٥) كم مرة قمت بتعبئة المخروط لملء الأسطوانة ؟

ماذا تلاحظ؟

مما سبق نلاحظ أنَّ:

حجم الأسطوانة = ٣ مرات من حجم المخروط

∴ حجم الأسطوانة = ٣ حجم المخروط

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ حجم الأسطوانة

وبما أن حجم الأسطوانة = π نق٢ × ع

مفهوم أساسي

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π نق^{٢} × ع

مثال (١):

مخروط نصف قطر قاعدته ٧ سم وارتفاعه ١٢ سم جد حجمه

الحل:

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π نق^{٢} × ع

= $\frac{١}{٣}$ × ٣,١٤ × (٧)^{٢} × ٢١

= ٦١٥,٤٤ سم^{٣}

مثال (٢):

مخروط حجمه ٣١٤سم^{٣} وطول قطر قاعدته ٢٠ سم جد ارتفاعه.

الحل:

الحجم = ٣١٤سم^{٣} ، نق = $\frac{٢٠}{٢}$ = ١٠سم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π نق^{٢} × ع

٣١٤ = $\frac{١}{٣}$ × ٣,١٤ × (١٠)^{٢} × ع

٣١٤ = $\frac{١}{٣}$ × ٣١٤ × ع

∴ ع = ٣سم

∴ الارتفاع = ٣ سم

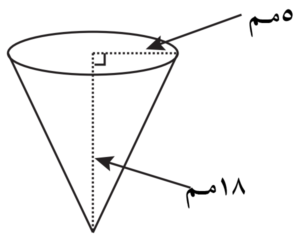
تمرين(٦)

١) مخروط نصف قطر قاعدته ٣سم وارتفاعه ١٠سم جد حجمه.

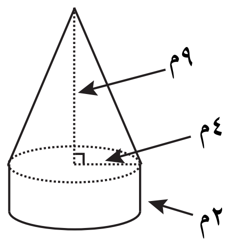
٢) مخروط حجمه ٢٠١سم٣ ونصف قطر قاعدته ٤سم جد ارتفاعه.

٣) مخروط حجمه ١٣١,٩ ديسم٣ وارتفاعه ١٤ ديسم جد طول قطر قاعدته.

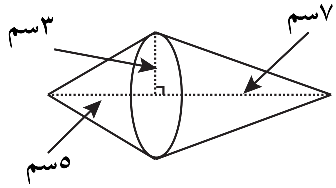
٤) جد حجم الأشكال الآتية:



(أ)



(ب)



(جـ)

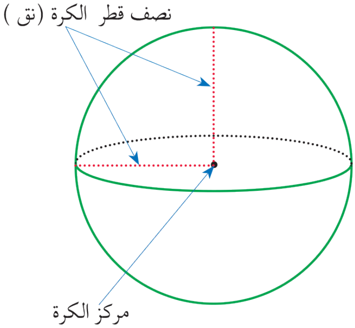
٥) أيّهما له تأثير أكبر في حجم المخروط مضاعفة نصف قطره أم مضاعفة ارتفاعه؟ برّر إجابتك.

٦) ماذا يحدث لارتفاع مخروط عند ضرب نصف قطر قاعدته في ثلاثة مع المحافظة على الحجم نفسه.

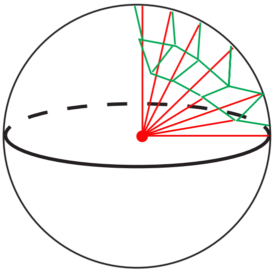
٧) اكتب موقفاً حياتياً يمكن أن يُحل بإيجاد حجم المخروط.

(٨ ـ٧) حجم الكرة:

تعرّفنا سابقاً أنَّ:

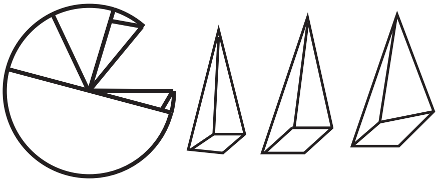


- الكرة هي شكل ثلاثي الأبعاد تبعد جميع النقاط على سطحها المسافة نفسها عن المركز.
- تُسمّى المسافة بين سطح الكرة ومركزها نصف قطر الكرة.
- الكرة لا يوجد لها أوجه أو قواعد أو أحرف أو رؤوس



استنتاج قاعدة حجم الكرة.

إذا كان لدينا كرة أردنا تقسيمها إلى أهرامات صغيرة بحيث يكون رأس الهرم عند مركز الكرة. ماذا تلاحظ؟



نلاحظ أن الكرة تحوّلت إلى الشكل المقابل وبالتالي يكون تحوّل حجم الكرة إلى مجموع حجم الأهرامات الناتجة منها.

∴ حجم الكرة = حجم الهرم(١) + حجم الهرم(٢) + حجم الهرم(٣) + ... + حجم الهرم(ن)

وبما أنَ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة قاعدة الهرم × الارتفاع.

وارتفاع كل الأهرامات التي تم تكوَينها من الكرة = نصف قطر الكرة.

$\therefore$ حجم الهرم الناتج = $\frac{١}{٣}$ × مساحة قاعدة الهرم × نق

وإذا رمزنا لمساحة قاعدة الهرم بالرمز م

$\therefore$ حجم الكرة = $\frac{١}{٣}$ × نق × $م_{١}$ + $\frac{١}{٣}$ × نق × $م_{٢}$ +.... + $\frac{١}{٣}$ × نق × $م_{ن}$

باستخراج $\frac{١}{٣}$ × نق عاملاً مشتركاً

$\therefore$ حجم الكرة = $\frac{١}{٣}$ × نق × [$م_{١}$ + $م_{٢}$ + ... + $م_{ن}$]

مع العلم أن [$م_{١}$ + $م_{٢}$ + ... + $م_{ن}$] تمثَل مجموع مساحات القاعدة لكل الأهرامات التي تم تكوَينها من الكرة.

ماذا يمثَل المقدار [$م_{١}$ + $م_{٢}$ + ... + $م_{ن}$] بالنسبة للكرة؟

نلاحظ أن:

المقدار $م_{١}$ + $م_{٢}$ + ... + $م_{ن}$ يمثّل مساحة سطح الكرة

$\therefore$ مساحة سطح الكرة = $م_{١}$ + $م_{٢}$ + ... + $م_{ن}$

وبما أنَ مساحة سطح الكرة = ٤ π $نق^{٢}$

$\therefore$ $م_{١}$ + $م_{٢}$ + ... + $م_{ن}$ = ٤ π $نق^{٢}$

وبالتالي يكون:

حجم الكرة = $\frac{١}{٣}$ × نق × ٤ π $نق^{٢}$ = $\frac{٤}{٣}$ π × $نق^{٣}$

مفهوم أساسي

$$\text{حجم الكرة} = \frac{٤}{٣} \times \pi \text{ نق}^{٣}$$

مثال (١):

كرة نصف قطرها ٨ سم، جد حجمها

الحل:

$$\text{حجم الكرة} = \frac{٤}{٣} \times \pi \text{ نق}^{٣}$$

$$= \frac{٤}{٣} \times ٣,١٤ \times (٨)^{٣}$$

$$= ٢١٤٣,٦ \text{ سم}^{٣}$$

مثال (٢):

كرة حجمها ١١٣,٠٤ سم^{٣} جد نصف قطرها

الحل:

$$\text{حجم الكرة} = \frac{٤}{٣} \times \pi \text{ نق}^{٣}$$

$$١١٣,٠٤ = \frac{٤}{٣} \times ٣,١٤ \times \text{نق}^{٣}$$

$$٣٣٩,١٢ = ١٢,٥٦ \text{ نق}^{٣}$$

$$\therefore \text{نق}^{٣} = \frac{٣٣٩,١٢}{١٢,٥٦} = ٢٧$$

$$\therefore \text{نق} = ٣ \text{ سم}$$

مثال (٣):

جد حجم كرة مساحة سطحها ١٠٠ π سم^{٢}

الحل:

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

١٠٠ π = ٤ π نق^{٢}

$\therefore$ نق^{٢} = $\frac{١٠٠\ \pi}{٤\ \pi}$ = ٢٥

$\therefore$ نق = ٥ سم

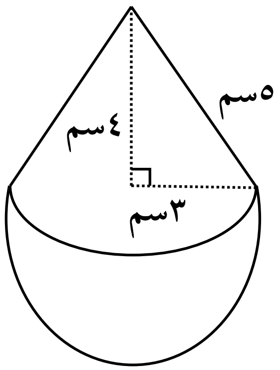
حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ × π نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣}$ × ٣,١٤ × (٥)^{٣} = ٥٢٣,٣ سم^{٣}

تمرين(٧)

١) جد حجم كرة نصف قطرها ١٠ سم

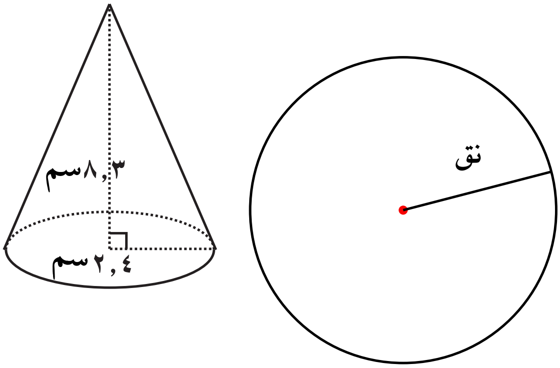
٢) الشكل المجاور يبيّن لعبة أطفال تتكوّن من نصف كرة ومخروط جد:



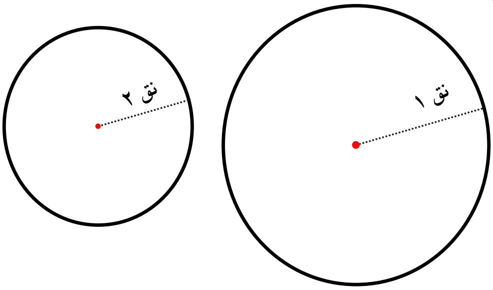
أ- حجم اللّعبة.

ب- المساحة السطحية للّعبة.

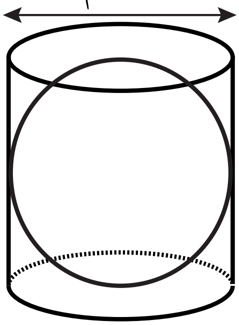
٣) الشكل المقابل يوضّح مخروط وكرة لهما الحجم نفسه جد نصف قطرة الكرة.



٤) إذا علمت أنَّ حجم الكرة الكبيرة (نصف قطرها نق$_{١}$) يساوي ضعف حجم الكرة الصغيرة (نصف قطرها نق$_{٢}$) أكتب معادلة تربط بين نق$_{١}$ ، نق$_{٢}$



٥) تمّ وضع كرة داخل أسطوانة بحيث يكون ارتفاع الأسطوانة مساوياً لقطر الكرة جد:



أ- حجم الكرة.

ب- حجم الفراغ الداخلي الذي لم تغطيه الكرة.